## A property of the Unitary Analogue of Ramanujan's Sum

A divisor $d > 0$ of the positive integer $n$ is called unitary if $d\delta = n$ and $(d, \delta) = 1$. We write $d \| n$. For integers $a, b, b > 0$, let $(a, b)_*$ denote the greatest divisor of $a$ which is a unitary divisor of $b$. ECKFORD COHEN ([1], § 2) defined the unitary analogue $c^*(m, n)$ of Ramanujan's Sum as

$$c^*(m, n) = \sum_{\substack{1 \le x \le n \\ (x, n)_* = 1}} e(m x, n) , \tag{1}$$

where $e(m, n) = \exp(2 \pi i m/n)$, and established that

$$c^*(m, n) \text{ is multiplicative as a function of } n , \tag{2}$$

$$\varphi^*(n) \equiv c^*(0, n) = \sum_{d \| n} d \mu^*(n/d) , \tag{3}$$

$$\mu^*(n) \equiv c^*(1, n) = (-1)^r , \tag{4}$$

where $r$ is the number of distinct prime factors of $n$.

Further, he established the following evaluation of $c^*(m, n)$:

$$c^*(m, n) = \sum_{\substack{d \mid m \\ d \| n}} d \mu^*(n/d) . \tag{5}$$

In this note, we establish the following:

**Theorem.** $c^*(m, n) = \dfrac{\varphi^*(n) \mu^*(n/a)}{\varphi^*(n/a)}$, where $a = (m, n)_*$.

*Proof.* Since $a$ is the greatest divisor of $m$ which is a unitary divisor of $n$, we can write $n = a N$, where $(a, N) = 1$. By (5), we have

$$c^*(m, n) = \sum_{d \| a} d \mu^*(n/d) = \sum_{\substack{cd = a \\ (c, d) = 1}} d \mu^*(a N/d) = \sum_{\substack{c d = a \\ (c, d) = 1}} d \mu^*(c N) .$$

Now, $(a, N) = 1$ and $c d = a$ imply that $(c, N) = 1$; so that by (2), (3) and (4),

$$c^*(m, n) = \sum_{\substack{c d = a \\ (c, d) = 1}} d \mu^*(c) \mu^*(N) = \mu^*(N) \sum_{d \| a} d \mu^*(a/d) = \mu^*(N) \varphi^*(a) .$$

Since $n = a N$ and $(a, N) = 1$, $\varphi^*(n) = \varphi^*(a) \varphi^*(N)$, so that

$$c^*(m, n) = \frac{\varphi^*(n) \mu^*(N)}{\varphi^*(N)} = \frac{\varphi^*(n) \mu^*(n/a)}{\varphi^*(n/a)} .$$

Hence the theorem follows.

D. SURYANARAYANA, Andhra Univ. Waltair, India

### REFERENCE

[1] E. COHEN, *Arithmetical Functions Associated with the Unitary Divisors of an Integer*, Math. Zeit. *74*, 66–80 (1960).

# Aufgaben

**Aufgabe 607.** Sind $X$ und $Y$ Teilmengen einer Menge $M$, so definieren wir $X + Y$ durch $X + Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$, d.h. $X + Y$ besteht aus all den Elementen von $M$, die in $X$ oder $Y$, jedoch nicht im Durchschnitt von $X$ und $Y$ liegen. Es sei nun $M$ eine endliche Menge mit $|M| = n$ Elementen. Ferner sei $k$ eine gerade ganze Zahl mit $2 \leqslant k \leqslant n - 1$. Zeige: Es gibt $n - 1$ Teilmengen $B_1, \ldots, B_{n-1}$ von $M$ mit den Eigenschaften: a) $|B_i| = k$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. b) Ist $X \subseteq M$ und ist $|X|$ gerade, so gibt es eine eindeutig bestimmte Teilmenge $I$ von $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ mit $X = \sum_{i \in I} B_i$.

H. LÜNEBURG, Mainz

*Lösung des Aufgabenstellers:* Es sei $P(M)$ die Potenzmenge von $M$. Bekanntlich bildet $P(M)$ bezüglich der oben eingeführten Addition eine elementarabelsche 2-Gruppe der Ordnung $2^n$. Es seien nun $X, Y \in P(M)$. Dann ist $|X+Y| = |X \cup Y| - |X \cap Y| = |X| + |Y| - 2|X \cap Y|$. Hieraus folgt, dass die Menge $H$ der Teilmengen gerader Mächtigkeit von $M$ eine Untergruppe von $P(M)$ bilden. Nun ist $|H| = 2^{n-1}$ und da $H$ als elementarabelsche 2-Gruppe ein Vektorraum der Dimension $n-1$ über $GF(2)$ ist, genügt es zu zeigen, dass die Menge aller Teilmengen der Mächtigkeit $k$ die Gruppe $H$ erzeugen, weil ja jedes Erzeugendensystem eines Vektorraumes auch eine Basis enthält. Ist $X \in H$, so ist $X$ die Vereinigung von paarweise disjunkten Teilmengen der Mächtigkeit 2. Da die Vereinigung von paarweise disjunkten Teilmengen gleich der Summe über diese Teilmengen ist, genügt es daher zu zeigen, dass alle Teilmengen der Mächtigkeit 2 in der von allen Teilmengen der Mächtigkeit $k$ erzeugten Gruppe liegen. Es seien daher $a$ und $b$ zwei verschiedene Elemente von $M$. Dann ist $|M \setminus \{a, b\}| = n-2$. Nun ist $k \leqslant n-1$ und daher $k-1 \leqslant n-2$. Es gibt folglich eine Teilmenge $Z$ von $M \setminus \{a, b\}$ mit $|Z| = k-1$. Setzt man $X = Z \cup \{a\}$ und $Y = Z \cup \{b\}$, so ist $|X| = |Y| = k$ und $X + Y = \{a, b\}$, q.e.d.

Zwei weitere Lösungen sandte J. FEHÉR (Pécs, Ungarn).

**Aufgabe 608.** Unter Verwendung von Kollineationen konstruiere man eine Parabel durch vier gegebene Punkte (ohne Verwendung einer Involution). K. PRACHAR, Wien

*Lösung:* Die Aufgabe kann als gelöst aufgefasst werden, wenn man die Richtung der Achse der Parabel $p_1$ kennt. Es existieren zwei Lösungen.

Gegeben sei das Viereck $A_1, B_1, C_1, D_1$. Die Geraden $A_1D_1$ und $B_1C_1$ schneiden sich in $\mathrm{I}_1$, die Geraden $A_1B_1$ und $C_1D_1$ schneiden sich in $\mathrm{II}_1$, die Geraden $A_1C_1$ und $B_1D_1$ schneiden sich in $\mathrm{III}_1$. Man übe nun eine perspektive Kollineation $R$ aus, bei der die Gerade $\mathrm{I}_1\mathrm{II}_1 = v_1$ in die Ferngerade übergeht (also Verschwindungsgerade ist). Das Viereck $A_1, B_1, C_1, D_1$ geht dann in ein Parallelogramm $A_2, B_2, C_2, D_2$ über. Wird das Kollineationszentrum $Z_{12}$ auf dem Kreis mit dem Durchmesser $\mathrm{I}_1\mathrm{II}_1$ angenommen, so ist das Parallelogramm $A_2, B_2, C_2, D_2$ ein Rechteck. Die Kollineationsachse $s_{12}$ kann beliebig gewählt werden (in der Konstruktion durch $C_1$ angenommen), muss nur parallel zu $\mathrm{I}_1\mathrm{II}_1$ sein. Die Parabel $p_1$ geht dann durch die Kollineation $R$ in eine Ellipse $p_2$ und der Punkt $\mathrm{III}_1$ in deren Mittelpunkt $\mathrm{III}_2$ über. Die Gerade $u_2$ (Fluchtgerade der Kollineation), die der Ferngerade entspricht, ist Tangente an die der Parabel $p_1$ entsprechende Ellipse $p_2$. Übt man die inverse Kollineation $R^{-1}$ aus, so entspricht dem Berührpunkt $P_2$ von $u_2$ mit $p_2$ der Fernpunkt $P_1$ der Achse der Parabel.

Um $P_2$ zu erlangen, übe man auf $A_2, B_2, C_2, D_2$ und $p_2$ eine perspektive Affinität aus.

Die Affinität werde so gewählt, dass $p_2$ in einen Kreis $p_3$ mit dem Mittelpunkt $\mathrm{III}_2 = \mathrm{III}_3$ und der (gemeinsamen) Tangente $u_2 = u_3$, und $P_2$ in den Berührpunkt $P_3$ von $u_2 = u_3$ mit $p_3$ übergeht. Man wähle als Richtung des unendlich fernen Zentrums $Z_{23}$ die Richtung von $u_2 = u_3$. Die Punkte $A_2, B_2, C_2, D_2$ gehen in Punkte $A_3, B_3, C_3, D_3$ auf dem Kreis $p_3$ über (je zwei Möglichkeiten). In der Affinität entsprechende Geraden (z.B. $A_2B_2$ und $A_3B_3$) schneiden sich auf der Affinitätsachse, die auch durch $\mathrm{III}_2 = \mathrm{III}_3$ gehen muss (insgesamt vier Möglichkeiten von Affinitätsachsen $s_{23}$, $s'_{23}$, $s''_{23}$, $s'''_{23}$, von denen je zwei auf dieselbe Lösung $P_2$ bzw. $P'_2$ führen). D.h. es gibt zwei Ellipsen, die $u_2 = u_3$ berühren und daher auch zwei Parabeln als Lösungen.

Durch Affinitätsachse, Affinitätsstrahlrichtung und einem Paar entsprechender Punkte ist die Affinität bestimmt und es lässt sich je nach Wahl von einer der vier Affinitätsachsen $P_2$ oder $P'_2$ ermitteln.

$P_2$ und $P'_2$ der Kollineation $R^{-1}$ unterworfen ergeben die Richtungen der Achsen der beiden möglichen Parabeln. Die Parabeln sind dann durch bekannte Konstruktionen (z.B. wie in der Konstruktion mit Hilfe des Satzes von Pascal) leicht zu vervollständigen.

W. STEINDL, Graz

# Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. Mai 1971,** wenn möglich in Maschinenschrift.

**Aufgabe 630.** Eine Ebene schneide einen geraden Kreiskegel in einer Ellipse. Es bezeichnen $\alpha$ den halben Öffnungswinkel des Kegels und $p$, $q$ die Abstände der Kegelspitze von den Hauptscheiteln der Ellipse. Man beweise, dass für den Flächeninhalt $F$ des Mantelstückes zwischen Kegelspitze und Schnittellipse gilt:

$$F = \pi \left(\frac{p+q}{2}\right) \sqrt{p\,q}\,\sin\alpha .$$

G. Pólya, Stanford, California, USA

**Aufgabe 631.** Es seien $p$ eine ungerade Primzahl und $\alpha$ eine beliebige natürliche Zahl. Man beweise

$$\prod_{k=1}^{p^{\alpha-1}} (k\,p-1) \equiv -1 \pmod{p^\alpha} .$$

J. Fehér, Pécs, Ungarn

**Aufgabe 632.** $A$, $B$ und $C$ seien drei verschiedene Punkte einer gegebenen Parabel. Man zeige, dass sich die Parabelnormalen in $A$, $B$, $C$ genau dann in einem Punkt treffen, wenn der Schwerpunkt des Dreiecks $ABC$ auf der Parabelachse liegt.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

**Aufgabe 633.** Es sei $\langle X, \mathfrak{T}\rangle$ ein topologischer $T_0$-Raum derart, dass es zu je zwei Punkten $x$, $y$ von $X$ einen Homöomorphismus $f$ von $X$ auf sich selbst mit $f(x) = y$ gibt. Es bezeichne $\bar{A}$ die abgeschlossene Hülle der Teilmenge $A$ von $X$. Man beweise oder widerlege: Aus $x, y \in X$ und $x \in \overline{\{y\}}$ folgt $y \in \overline{\{x\}}$. J. Rätz, Bern

# Literaturüberschau

*Battelle Rencontres 1967.* Lectures in Mathematics and Physics. Edited by C. M. DeWitt and J. A. Wheeler. 557 Seiten. $ 14.50. W. A. Benjamin, Inc., New York 1968.

Im Sommer 1967 haben sich auf Einladung des Battelle-Instituts 33 namhafte Physiker und Mathematiker in Washington zusammengefunden, um in gewissen Forschungsgebieten der theoretischen Physik eine gemeinsame Sprache zu finden. Der vorliegenden Vortragssammlung kann trotz der didaktisch hochstehenden Beiträge kein Lehrbuchcharakter zugesprochen werden. Vielmehr wird der Versuch gewagt, auf möglichst kleinem Raum eine möglichst umfassende und kompetente Orientierung in aktuellen Fragen der Gravitationstheorie und quantenmechanischen Störungsrechnung zu geben und damit für alle an diesen Forschungszweigen interessierten Mathematiker und Physiker eine gemeinsame Diskussionsgrundlage zu schaffen.

Einem Beitrag von Helgason über die klassische Theorie der Liegruppen mit Betonung der nichtkompakten, halbeinfachen Gruppen und den assoziierten Symmetrieräumen folgt eine Übersicht über Begriffe und Fragen im Zusammenhang mit dem schwierigen Versuch einer axiomatischen Begründung der allgemeinen Relativitätstheorie (ART).

Ein Grossteil der Beiträge befasst sich mit kosmologischen Fragen. Auf experimenteller Seite weisen die von Hubble 1929 entdeckte Expansion des Alls und die 1965 gefundene Hintergrundstrahlung im Mikrowellenbereich – einer Strahlungstemperatur von 3 °K entsprechend – auf die Existenz interessanter Entwicklungsphasen des Alls in endlicher Vergangenheit hin. Von theoretischer Seite wird durch die Singularitätstheoreme von