

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 25 (1970)  
**Heft:** 5

**Rubrik:** Literaturüberschau

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. Mai 1971**, wenn möglich in Maschinenschrift.

**Aufgabe 630.** Eine Ebene schneide einen geraden Kreiskegel in einer Ellipse. Es bezeichnen  $\alpha$  den halben Öffnungswinkel des Kegels und  $p, q$  die Abstände der Kegelspitze von den Hauptscheiteln der Ellipse. Man beweise, dass für den Flächeninhalt  $F$  des Mantelstückes zwischen Kegelspitze und Schnittellipse gilt:

$$F = \pi \left( \frac{p+q}{2} \right) \sqrt{pq} \sin \alpha.$$

G. PÓLYA, Stanford, California, USA

**Aufgabe 631.** Es seien  $p$  eine ungerade Primzahl und  $\alpha$  eine beliebige natürliche Zahl. Man beweise

$$\prod_{k=1}^{p\alpha-1} (kp - 1) \equiv -1 \pmod{p^\alpha}.$$

J. FEHÉR, Pécs, Ungarn

**Aufgabe 632.**  $A, B$  und  $C$  seien drei verschiedene Punkte einer gegebenen Parabel. Man zeige, dass sich die Parabelnormalen in  $A, B, C$  genau dann in einem Punkt treffen, wenn der Schwerpunkt des Dreiecks  $ABC$  auf der Parabelachse liegt.

A. BAGER, Hjørring, Dänemark

**Aufgabe 633.** Es sei  $\langle X, \mathfrak{T} \rangle$  ein topologischer  $T_0$ -Raum derart, dass es zu je zwei Punkten  $x, y$  von  $X$  einen Homöomorphismus  $f$  von  $X$  auf sich selbst mit  $f(x) = y$  gibt. Es bezeichne  $\bar{A}$  die abgeschlossene Hülle der Teilmenge  $A$  von  $X$ . Man beweise oder widerlege: Aus  $x, y \in X$  und  $x \in \overline{\{y\}}$  folgt  $y \in \overline{\{x\}}$ .

J. RÄTZ, Bern

## Literaturüberschau

*Battelle Rencontres 1967.* Lectures in Mathematics and Physics. Edited by C. M. DEWITT and J. A. WHEELER. 557 Seiten. \$ 14.50. W. A. Benjamin, Inc., New York 1968.

Im Sommer 1967 haben sich auf Einladung des Battelle-Instituts 33 namhafte Physiker und Mathematiker in Washington zusammengefunden, um in gewissen Forschungsgebieten der theoretischen Physik eine gemeinsame Sprache zu finden. Der vorliegenden Vortragssammlung kann trotz der didaktisch hochstehenden Beiträge kein Lehrbuchcharakter zugesprochen werden. Vielmehr wird der Versuch gewagt, auf möglichst kleinem Raum eine möglichst umfassende und kompetente Orientierung in aktuellen Fragen der Gravitationstheorie und quantenmechanischen Störungsrechnung zu geben und damit für alle an diesen Forschungszweigen interessierten Mathematiker und Physiker eine gemeinsame Diskussionsgrundlage zu schaffen.

Einem Beitrag von Helgason über die klassische Theorie der Liegruppen mit Betonung der nichtkompakten, halbeinfachen Gruppen und den assoziierten Symmetrieräumen folgt eine Übersicht über Begriffe und Fragen im Zusammenhang mit dem schwierigen Versuch einer axiomatischen Begründung der allgemeinen Relativitätstheorie (ART).

Ein Grossteil der Beiträge befasst sich mit kosmologischen Fragen. Auf experimenteller Seite weisen die von Hubble 1929 entdeckte Expansion des Alls und die 1965 gefundene Hintergrundstrahlung im Mikrowellenbereich – einer Strahlungstemperatur von  $3^\circ\text{K}$  entsprechend – auf die Existenz interessanter Entwicklungsphasen des Alls in endlicher Vergangenheit hin. Von theoretischer Seite wird durch die Singularitätstheoreme von

Penrose und Hawkins nahegelegt, dass alle Lösungen der Einstein-Gleichung, welche den bekannten kosmologischen Modellen adäquat sind, in endlicher Vergangenheit eine Singularität besitzen. Die Natur dieser Singularitäten ist noch weitgehend ungeklärt, und der Beitrag von Misner soll die Problematik dieses Forschungsgebietes aufzeigen. Die Instabilitäten der Gravitation bei extrem hoher Massenkonzentration manifestieren sich in den Initialsingularitäten der kosmologischen Modelle und den Kollapsphasen jener Modelle, bei denen die Expansion nicht unendlich andauert, sondern eine Endphase endlicher und möglicherweise extrem grosser Krümmung des Raumes erreicht wird. Die Massenkonzentrationen für diese hochkondensierten, chaotischen (heissen) Phasen des Alls können so gross werden, dass sie zur Überprüfung der topologischen Struktur der Raum-Zeit (RZ) für extreme Raumkrümmungen zwingen.

Wheeler stellt der Partikelmechanik in der Lorentz-Minkowski-RZ die Geometrodynamik gegenüber, welche sich in sog. Superräumen abspielt, deren Punkte Äquivalenzklassen positiv definiten  $3 \times 3$  Metriken sind, d.h. gewisse Arten von Raumgeometrien. In der Geometrodynamik ist die momentane Konfiguration des Raumes eine dreidimensionale Geometrie, dargestellt als Punkt des Superraumes. Die Geometrodynamik erweist sich im Hinblick auf eine Quantisierung des Gravitationsfeldes als besonders geeignete Betrachtungsweise. In der funktionalen Darstellung wird der Zustand des Gravitationsfeldes durch die Funktion  $\psi$  dargestellt, welche den Raum aller möglichen dreidimensionalen Symmetrien (Superraum) in die komplexen Zahlen abbildet.

Die wegen ihrer Unübersichtlichkeit wenig populäre Everett-Wheeler-Interpretation der Quantenmechanik dürfte hier besonders klar dargestellt sein. Sie gestattet, im Gegensatz zur Kopenhagener Deutung, der Wellenfunktion selbst eine physikalische Bedeutung zuzumessen, was bei den Wellenfunktionen des Gravitationsfeldes sehr dienlich wäre. Da die QM der RZ noch im Aufbau steht, wird die Everett-Wheeler-Metatheorie in diesem Buch noch auf die klassische QM angewendet.

Mit einem Beitrag über Renormalisierung in der relativistischen QM schliesst Hepp eine Informationslücke zwischen Physikern und Mathematikern und gibt dem Vortrag von Lascoux über Störungsrechnung in der Quanten-Feldtheorie einen Hintergrund. Ein wesentlicher Teil des Buches ist dem Studium der Feynman-Integrale gewidmet, welche den Inhalt der quantenmechanischen Störungstheorie in allgemeinsten Form wiedergeben. Ein Artikel von Pham über Landau-Singularitäten der Feynman-Integrale im sog. physikalischen Bereich (reelle Impulse) zeigt gleichzeitig den Weg zu ihrer physikalischen Deutung und passenden Anwendung in verschiedenen Theorien.

Die in den Potenzreihenentwicklungen der Streuamplituden nach den Kopplungskonstanten (Feynman-Dyson-Entwicklung) auftretenden relativistischen Feynman-Amplituden werden mit Methoden der algebraischen Topologie untersucht.

Die zum Schluss von Mathematikern verfassten Artikel über Themen der Topologie und Differentialgeometrie enthalten insbesondere die Theorie von Morse, Beiträge über spezielle Gruppen und über elementare Probleme im  $R^n$  mit Lösungen für Ausnahmewerte von  $n$ . Sie ergänzen das Buch zu einem abgeschlossenen Beitrag über aktuelle Probleme der theoretischen Physik.

F. AMMANN

*Mathématiques Programme P.C. Formules commentées.* Von J. KLEIN und G. REEB. 160 Seiten. 14 F. Gauthier-Villars, Paris 1968.

Das Heft A dieser sehr nützlichen Zusammenstellung wurde in *El. Math.* 22, 119 (1967) besprochen. Das vorliegende, nach dem gleichen Schema abgefasste Heft D umfasst lineare Algebra, Systeme von Differentialgleichungen, lineare partielle Differentialgleichungen, Funktionen einer komplexen Variablen, Wahrscheinlichkeitsrechnung.

E. TROST

*Lehrbuch der Mathematik für Handelsakademien.* Von K. HELLMICH, G. SCHNEIDER, F. ZAUNER. 5 Bände mit zusammen 1289 Seiten und 394 Figuren. E. Russ-Verlag, Bregenz 1967.

Die Kapitel dieser Bände sind in der Regel nach dem Schema Begriffe und Lehrsätze, Musterbeispiele, Aufgaben gegliedert. Das Schwergewicht liegt auf den letzten beiden

Gegenständen. Mit über 900 durchgerechneten Beispielen und über 7700 Aufgaben (fast durchwegs mit Lösungen) steht dem Leser ein wertvolles Übungsmaterial zur Verfügung, das zum Teil der allgemeinen Mathematik, zum Teil der Wirtschaftswissenschaft entnommen ist. In der Präsentation der Theorie stehen Ausführlichkeit und Anschaulichkeit an erster Stelle, was bei einem Lehrbuch für Berufsschulen verständlich ist. Wenn aber neben dem praktischen Können auch das «mathematische Denken in seiner allgemein bildenden Bedeutung» zur Geltung kommen soll, so sollte auf die Exaktheit und Prägnanz der Formulierungen grösseres Gewicht gelegt werden.

Der Stoff umfasst Arithmetik und Algebra (Grundoperationen, Gleichungslehre, komplexe Zahlen, arithmetische und geometrische Folgen), Planimetrie (bis zur Ähnlichkeit), Analytische Geometrie (Gerade und Kegelschnitte), Funktionenlehre (Potenzfunktion, Polynome, Winkelfunktionen, Exponentialfunktion und Logarithmus), Einführung in die Differential- und Integralrechnung (im Bereich der vorher eingeführten Funktionen), Zinseszins- und Rentenrechnung, Tilgungsrechnung, Kurs und Rentabilitätsrechnung, Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Beispiele zur Unternehmensforschung (Operation Research).  
E. TROST

*Exercices d'algèbre, analyse et probabilités.* Par G. LEFORT. Tome 2. 572 pages. Dunod, Paris 1969.

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants de seconde année du premier cycle M. P. Il contient 520 exercices ainsi que leurs solutions. La matière est répartie en six parties intitulées: Structures algébriques fondamentales, révisions et compléments; Algèbre linéaire et multilinéaire, applications; Séries numériques, convergence uniforme des suites et séries de fonctions, séries entières; Intégration sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ , intégrales convergentes, séries de Fourier; Applications de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$ , intégrales multiples, analyse vectorielle, fonctions holomorphes d'une variable complexe, théorèmes des résidus; Initiation au calcul des probabilités. Chaque partie débute par des rappels et trois de ces parties sont subdivisées en trois chapitres chacune. L'ouvrage est exécuté avec soin et peut être utilisé aussi par des autodidactes qui prendront la peine de trouver d'abord leurs propres solutions aux problèmes posés puis de les comparer aux solutions proposées par l'auteur.

S. PICCARD

*Les méthodes de simulation*, monographie de recherche opérationnelle N° 7 composée par un groupe de spécialistes animé par J. AGARD, préface de Robert FORTET. 154 pages. Dunod, Paris 1968.

L'ouvrage comprend les textes des huit conférences présentées à la Journée sur les méthodes de simulation, organisée en novembre 1966 par l'association française d'informatique et de recherche opérationnelle (AFIRO). Ces exposés ont mis en lumière les résultats déjà acquis et les nombreux problèmes encore à résoudre dans un domaine des mathématiques appliqué fréquemment aux sciences physiques et économiques et qui fait largement emploi des calculatrices électroniques. Relevons les titres des sept exposés en question. J. AGARD: L'art de la simulation. Bilan de quelques expériences. J. STENGEL: Modèles mathématiques ou modèles de simulation. P. DE GALL: Convergence des simulations et application aux réseaux téléphoniques. J. ALTABER: Représentations arithmétiques de grandeurs aléatoires. M. PRÉCIGOUT: Un système de simulation: G.P.S.S. G. THOMAS: Introduction de l'aléatoire dans les problèmes d'ordonnancement. Méthode de simulation. A. KAUFMANN: Méthode SIMUPORT pour la simulation des ports de commerce. F. FORTET: Simulation de systèmes à décisions.  
S. PICCARD

*Les processus de ramification.* Par T. E. HARRIS. Applications à la physique et à la biologie. 275 pages. Dunod, Paris 1969.

Cet excellent ouvrage qui ressort de la recherche opérationnelle a été traduit en français par MM. C. REBOUL et L. HERMANN. Il avait paru en édition originale chez Springer (Berlin, etc.) en 1963. On trouve dans ce livre des développements mathématiques du fameux modèle de Galton-Watson concernant le développement des familles ou des populations et d'intéressantes applications de ce modèle généralisé à divers problèmes de physique et de biologie. La matière est répartie en sept chapitres: Le processus de ramifi-

cation de Galton-Watson; Processus à un nombre fini de types; Processus général de ramification; Application aux neutrons (théorie du groupe homogène: cas isotrope); Processus de ramification markoviens (temps continu); Processus de ramification avec dépendance de l'âge; Les processus de ramification dans la théorie des rayons cosmiques (cascades d'électrons-photons). Soulignons la clarté et la précision de cet exposé.

S. PICCARD

*Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs.* Von R. SAUER und I. SZABO. Teil II: XX und 684 Seiten mit 148 Abbildungen. DM 136.–. Teil III: XIX und 535 Seiten mit 101 Abbildungen. DM 98.–. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 140 und 141. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg und New York 1968/1969.

Das vierbändige Werk, von dem jetzt die drei ersten Bände vorliegen, soll den Ingenieur mit der Mathematik vertraut machen, welche heute und voraussichtlich in der Zukunft für das Ingenieurwesen wichtig ist.

Vorausgesetzt werden die Kenntnisse, wie sie in Vorlesungen an (deutschen) Technischen Hochschulen in den ersten drei bis vier Semestern vermittelt werden.

Zu jedem behandelten Gebiet sind die grundlegenden Definitionen, Aussagen und Methoden erwähnt; das Werk ist keine bloße Formelsammlung.

Beweise werden soweit geführt, als es das Verständnis eines Satzes oder einer Methode erfordert. Viel Raum ist der Numerik reserviert, deren Bedeutung in einem heute wohl kaum zuverlässig zu schätzenden Masse noch zunehmen wird.

Jeder Abschnitt ist als selbständiger Teil verfasst, durch Hinweise auf andere Abschnitte aber mit dem Gesamtwerk verbunden.

Wer, vertrauend auf seine in den Pflichtvorlesungen erworbene Ingenieurmathematik, die Bücher bei seiner Arbeit verwendet, wird feststellen, dass sie an den Benutzer recht hohe Anforderungen stellen.

Der 1968 erschienene Band III umfasst die sechs Abschnitte Algebra, Geometrie und Tensoralkül, Interpolation und genäherte Quadratur, Approximation von Funktionen, lineare und nichtlineare Optimierung, Rechenanlagen. Für verschiedene Beispiele numerischer Methoden sind Programme in ALGOL angeführt.

Im vergangenen Jahr erschien Band II, die klassische Analysis umfassend. In den beiden Hauptabschnitten Anfangswertprobleme und Rand- und Eigenwertprobleme werden Theorie und Anwendung der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen, der Integralgleichungen und der Variationsrechnung behandelt.

Die numerischen Methoden sind, neben den klassischen, ausführlich dargestellt.

Beide Bände werden dem interessierten Ingenieur vielseitiges und wertvolles, in der Handhabung allerdings anspruchsvolles Werkzeug sein.

W. WANNER

*First-order Logic.* Von R. M. SMULLYAN. XII und 158 Seiten. DM 36.–. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 43. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg und New York 1968.

«First-order Logic» ist eines der Bücher, die einen recht anspruchsvollen Stoff übersichtlich und klar darlegen. Es ist deshalb auch dem Nicht-Spezialisten unter den Mathematikern zugänglich. Allerdings ist eine kritische Begutachtung der modernen Darstellungsweise von R. M. SMULLYAN nur möglich, wenn dem Leser frühere Arbeiten, auf die sich R. M. SMULLYAN z. T. stützt, bekannt sind – zum Beispiel die Arbeiten von BETH, GENTZEN, HASENJAEGER, HENKIN, HILBERT, HINTIKKA, LÖWENHEIM, SKOLEM usw.

Smullyans Arbeit verfolgt zwei Ziele: Erstens gibt sie eine neuartige Einführung in die Theorie der Quantifizierung, in der zu den üblichen grundlegenden Operationen der Prädikatenlogik die Operationen der «Generalisierung» und der «Partikularisierung» hinzugefügt werden, die zusammen die Operation der Quantifizierung bilden.

Zweitens werden neue Resultate und Techniken der sog. analytischen Methode (cut-free method) gezeigt. Die Idee für diese Methode lieferte GENTZEN in seinen «Untersuchungen über das logische Schliessen». Eine Formel, die aus prädikatenlogischen Operationen aufgebaut ist, wird dabei schrittweise in Unterformeln zerlegt, bis schliesslich

nur noch einzelne Grundoperationen übrigbleiben. R. M. SMULLYAN bedient sich dabei einer einfachen und eleganten Schema-Methode.

Das Buch besteht aus drei Teilen. Der erste und der zweite Teil haben eher Einführungscharakter.

Zunächst werden im 1. Teil die Grundlagen, wie Einführung des «Baumes», Formeln der Aussagenlogik, Boolesche Bewertung, Schemamethode und Kompaktheitstheorem der Aussagenlogik erarbeitet.

Der 2. Teil ist der Theorie der Quantifizierung gewidmet. Die im ersten Teil eingeführten Begriffe und Methoden werden für die durch die Quantoren erweiterte Prädikatenlogik verallgemeinert.

Erwähnenswert ist dabei der Smullyansche Hauptsatz dieser Theorie, der ein Vollständigkeitstheorem sowie früher formulierte Sätze von HERBRAND, HENKIN, HASEN-JAEGER und BETH enthält und in einer eleganteren Form zusammenfasst.

Schliesslich werden auch Axiomensysteme der Theorie der Quantifizierung untersucht. Mit Hilfe des erwähnten Hauptsatzes gelingt es, aus einem Standardsystem ein besonders einfaches Axiomensystem vom Hilbert-Typ aufzustellen und dessen Vollständigkeit zu beweisen.

Im dritten Teil setzt sich der Autor mit modernen Fragen der Quantifizierungstheorie auseinander. Insbesondere werden Gentzen-Systeme der Aussagenlogik sowie der Gentzensche Hauptsatz auf die neue Theorie übertragen, vereinfacht und erweitert. Das neue Gentzen-System führt zu einem einfachen Beweis des Craigschen Interpolationsatzes. Auf Grund der dabei entstehenden Ideen wird eine strengere Version des Vollständigkeitstheorems gezeigt, das symmetrische Vollständigkeitstheorem. Daraus resultieren wiederum neue Systeme der linearen logischen Schlussweise. P. FUCHS

*Lineare Wirtschafts algebra.* VON ARNO JAEGER und KLAUS WENKE. Band 13 der Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik. 334 Seiten mit 45 Figuren und 32 Tabellen. DM 48.–. B. G. Teubner, Stuttgart 1969.

Das Buch ist als Einführung in die lineare Algebra für Wirtschaftswissenschaftler geschrieben. Es werden weder wirtschaftliche Spezialkenntnisse noch besondere mathematische Kenntnisse vorausgesetzt. In einer kurzen Einleitung für Nichtmathematiker wird an einem stark vereinfachten Bild eines Industrieunternehmens die Verwendung mathematischer Begriffe und Methoden motiviert. Es folgen einige Bemerkungen zum Verständnis der Mathematik und der Anwendung mathematischer Methoden auf wirtschaftliche Fragen.

Die elementare lineare Algebra wird auf dem Umgang mit Listen aufgebaut. Mit Rücksicht auf den angesprochenen Leserkreis wird auf die übliche geometrische Motivierung der Begriffe verzichtet. Das bedingt teilweise eine neue, aber recht geschickt gewählte Terminologie, vor allem bei den Methoden zur Lösung von Gleichungs-, Ungleichungs- und Optimierungssystemen. Die folgenden Kapitel behandeln Mengen, Strukturen und Modelle; Familien, Tupel und Matrizen; Lineare Räume; Lineare Gleichungs- und Ungleichungssysteme und zum Abschluss einige spezielle Methoden und Probleme (u.a. Präferenzordnungen, Minkowski-Leontief-Systeme und Neumann-Reihen, Transportprobleme).

Die Darstellung ist am Anfang sehr breit und praxisbezogen, wird dann aber zusehends abstrakter. Es ist zu hoffen, dass dieser Versuch, ausgehend von den Fragestellungen der Wirtschaftswissenschaften, einen Zugang zur abstrakten Mathematik zu finden, von Mathematikern und Ökonomen beachtet wird. A. MÜLLER

*Éléments de mathématiques modernes.* Par M. RICHARDSON. Collection «Sigma» dirigée par M. Henri Pierche, 4. 690 pages. Dunod, Paris 1968.

Cet ouvrage qui s'adresse aux étudiants en sciences économiques, politiques et sociales paraît en seconde édition revue et augmentée, en traduction française. D'un niveau élémentaire, il effleure de nombreux sujets ayant trait à la logique mathématique, l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie, la trigonométrie, le calcul différentiel et intégral, les probabilités, la statistique. Les développements théoriques ne sont guère poussés, mais de nombreux exercices sont offerts à la perspicacité des lecteurs et l'ouvrage vise avant tout à attirer l'attention des lecteurs sur les applications multiples des mathématiques dans les domaines les plus variés. S. PICCARD