

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 26 (1971)  
**Heft:** 6

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**Remark 3.** Theorem 2 holds good for generalised integers  $\{l_n\}$  also, that is, if  $F(x)$  and  $G(x)$  are functions of a real variable  $x \geq 1$ , then

$$G(x) = \sum_{l_n^k = x} F\left(\frac{x}{l_n^k}\right) \iff F(x) = \sum_{l_n^k = x} \mu(l_n) G\left(\frac{x}{l_n^k}\right).$$

In case  $k = 1$  this theorem reduces to a theorem established by HORADAM (cf. [5], theorem 3).  
D. SURYANARAYANA, Waltair, India

## REFERENCES

- [1] E. COHEN, *Arithmetical Functions Associated with the Unitary Divisors of an Integer*, Math. Zeit. 74, 66–80 (1960).
- [2] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed. (Oxford 1965).
- [3] E. M. HORADAM, *Arithmetical Functions of Generalised Primes*, Amer. Math. Monthly 68, 626–629 (1961).
- [4] E. M. HORADAM, *Arithmetical Functions Associated with the Unitary Divisors of a Generalised Integer*, Amer. Math. Monthly 69, 196–199 (1962).
- [5] E. M. HORADAM, *The Order of Arithmetical Functions of Generalised Integers*, Amer. Math. Monthly 70, 506–512, (1963).

## Aufgaben

**Aufgabe 634.** Es seien  $f, g$  zwei im Intervall  $[a, b]$  im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbare reellwertige Funktionen mit  $f(x) \geq 0, g(x) \geq c > 0$  für alle  $x \in [a, b]$ . Ferner seien  $p, q$  reelle Zahlen mit  $0 < p < 1, q < 0, 1/p + 1/q = 1$ . Man leite die «Gegenform zur Hölderschen Ungleichung»

$$\int_a^b f g \, dx \geq \left( \int_a^b f^p \, dx \right)^{1/p} \left( \int_a^b g^q \, dx \right)^{1/q}$$

direkt aus der gewöhnlichen Hölderschen Ungleichung her. H. Hadwiger, Bern

**Lösung:** Die auf die vorliegende Aufgabenstellung zugeschnittene Form der gewöhnlichen Hölderschen Ungleichung besagt: Sind  $F, G$  in  $[a, b]$  im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbare reellwertige Funktionen mit  $F(x) \geq 0, G(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ , so gilt für alle reellen  $r, s$  mit  $r > 1$  und  $1/r + 1/s = 1$ :

$$\int_a^b FG \, dx \leq \left( \int_a^b F^r \, dx \right)^{1/r} \left( \int_a^b G^s \, dx \right)^{1/s}. \quad (*)$$

Setzen wir  $r = 1/p, s = -q/p$ , so ist nach den Voraussetzungen der Aufgabe (über  $p, q$ )  $r > 1$  sowie  $1/r + 1/s = p - p/q = p(1 - 1/q) = 1$  erfüllt. Wählen wir weiter  $F = (fg)^p, G = g^{-p}$ , so genügen auch  $F$  und  $G$  nach den (über  $f, g$ ) gemachten Voraussetzungen den für die Gültigkeit der gewöhnlichen Hölderschen Ungleichung hin-

reichenden Bedingungen, und man erhält aus (\*)

$$\int_a^b f^p dx \leq \left( \int_a^b fg dx \right)^p \left( \int_a^b g^q dx \right)^{-p/q},$$

woraus sich sofort die Behauptung der Aufgabe ergibt.

P. Bundschuh, Freiburg i. Br.

**Aufgabe 635.** Ist  $\alpha(n)$  die Anzahl der Darstellungen von  $n$  als kleinstes gemeinsames Vielfaches zweier natürlicher Zahlen (unter Berücksichtigung der Reihenfolge), so gilt für  $R(s) > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{n^s} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)},$$

wobei  $\zeta$  die Riemannsche Zetafunktion bedeutet. Es sei allgemeiner für reelle  $a$  und  $b$

$$\alpha_{a,b}(n) = \sum_{[x,y]=n} x^a y^b.$$

Man zeige, dass für  $R(s) > 1 + \max(a, b, a + b)$  die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{a,b}(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-a) \zeta(s-b) \zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)}$$

gilt.

H. Scheid, Mainz

*First Solution:* If  $g, h$  are arbitrary functions,

$$f(n) = \sum_{[x,y]=n} g(x) h(y), \quad F(n) = \sum_{x|n} f(x), \quad G(n) = \sum_{x|n} g(x), \quad H(n) = \sum_{x|n} h(x),$$

it follows that

$$F(n) = \sum_{k|n} \sum_{[x,y]=k} g(x) h(y) = \sum_{x|n} \sum_{y|n} g(x) h(y) \sum_{\substack{k|n \\ [x,y]=k}} 1.$$

Since the inner sum is 1, we get

$$F(n) = G(n) H(n). \tag{*}$$

In particular, if

$$g(x) = x^a, \quad h(y) = y^b,$$

then

$$f(n) = \alpha_{a,b}(n), \quad G(n) = \sigma_a(n), \quad H(n) = \sigma_b(n).$$

Thus, by (\*),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{a,b}(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n) \sigma_b(n)}{n^s}.$$

But by a well-known formula of Ramunajan (cf. e.g. E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford 1951, p. 8, (1.3.3.))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n) \sigma_b(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s) \zeta(s-a) \zeta(s-b) \zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)}$$

and therefore

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{a,b}(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-a) \zeta(s-b) \zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)}.$$

This evidently holds for

$$R(s) > 1 + \max(0, a, b, a+b). \quad (**)$$

L. Carlitz, Durham, N.C., USA

*Zweite Lösung:* Da  $\alpha_{0,0}(n) = \sum_{[x,y]=n} 1 = \alpha(n)$  für alle natürlichen  $n$  gilt, ist die erste Behauptung in der zweiten enthalten, und wir zeigen nur diese. Für  $R(s) > 1 + \max(a, b, a+b)$  ist

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\zeta(s-a) \zeta(s-b) \zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)} \\ &= \prod_p \frac{1 - p^{a+b-2s}}{(1 - p^{a-s})(1 - p^{b-s})(1 - p^{a+b-s})} =: \prod_p F(p). \end{aligned} \right\} (1)$$

Für jede Primzahl  $p$  ist

$$\begin{aligned} F(p) &= (1 - p^{a+b-2s}) \sum_{i,j,k \geq 0} p^{(i+k)a + (j+k)b - (i+j+k)s} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \right) p^{(i+k)a + (j+k)b - (i+j+k)s} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} p^{-ms} \sum_{\substack{(u,v) \\ \max(u,v)=m}} p^{ua+vb}. \end{aligned}$$

Hierin ist in der inneren Summe über alle geordneten Paare  $(u, v)$  nichtnegativer ganzer Zahlen zu summieren, deren Maximum gleich ist  $m$ . Also ist

$$\prod_p F(p) = \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} p^{-ms} \sum_{\substack{(u,v) \\ \max(u,v)=m}} p^{ua+vb}, \quad (2)$$

und daher lässt sich der Ausdruck links in (1) in der Form einer Dirichlet-Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  (in eindeutiger Weise!) schreiben, wo die  $a_n$  zu bestimmen bleiben. Ist

$n = \prod_{r=1}^t p_r^{m_r}$ , so ist wegen (2)

$$a_n = \sum_{\substack{(u_r, v_r) \text{ mit} \\ \max(u_r, v_r) = m_r \\ (r=1, \dots, t)}} (p_1^{u_1} \dots p_t^{u_t})^a (p_1^{v_1} \dots p_t^{v_t})^b = \sum_{\substack{x = p_1^{u_1} \dots p_t^{u_t} \\ y = p_1^{v_1} \dots p_t^{v_t} \\ \max((u_r, v_r)) = m_r \\ (r=1, \dots, t)}} x^a y^b = a_{a,b}(n)$$

für alle natürlichen  $n$ ; denn offensichtlich bedeuten die Bedingungen in der zweiten Summe, dass genau über die geordneten Paare  $(x, y)$  natürlicher Zahlen zu summieren ist, deren kleinstes gemeinsames Vielfaches  $n$  ist.

P. Bundschuh, Freiburg i. Br.

Eine weitere Lösung – unter der stärkeren Voraussetzung (\*\*\*) wie die obige erste Lösung – sandte A. Bager (Hjørring, Dänemark).

**Aufgabe 636.** In einer Ebene sind zwei Geraden  $g_1, g_2$  und drei Punkte  $A_1, A_2, P$  gegeben. Man bestimme diejenigen durch  $A_1$  und  $A_2$  gehenden Kegelschnitte, die  $g_1$  und  $g_2$  berühren und deren Berührungspunkte mit  $P$  kollinear sind.

C. Bindschedler, Küsnacht

*Lösung:* Die durch  $P$  gehenden Berührsehnen der beiden Lösungskegelschnitte ergeben sich als Doppelstrahlen jener Strahleninvolution mit dem Scheitel  $P$ , von der  $PA_1$  und  $PA_2$  sowie  $PG_1$  und  $PG_2$  zwei Strahlenpaare sind, wobei  $G_1$  und  $G_2$  die Schnittpunkte der Geraden  $A_1A_2$  mit den Geraden  $g_1$  bzw.  $g_2$  bedeuten. Diese Lösung lässt sich durch kollineare Verallgemeinerung jenes Sonderfalles herleiten, bei dem  $A_1$  und  $A_2$  die absoluten Punkte sind, wobei die Lösungskegelschnitte dann jene  $g_1$  und  $g_2$  berührenden Kreise sind, deren Berührsehnen durch  $P$  gehen.

K. Grün, Linz, Donau, Österreich

Weitere Lösungen sandten J. Fehér (Pécs, Ungarn), H. Sachs (Stuttgart) und K. Schuler (Rottweil, BRD).

**Aufgabe 637.** Am ebenen Dreieck mit Flächeninhalt  $(1/2)\sqrt{abcd} = (1/2)\sqrt{h_a h_b h_c h} = \sqrt{r_a r_b r_c r} = \sqrt{s_a s_b s_c s}$  (Seiten, Höhen, Berührradien, Berührstrecken) zeige man: Die Größen  $x = \sqrt{r_a/s_b}$  und  $y = \sqrt{h_a/b}$  genügen den Ungleichungen

$$x^3 + 2\sqrt{s/r} \leq x s/r, \tag{1}$$

$$y^3 + 2\sqrt{d/h} \leq 2 y s/h. \tag{2}$$

Gleichheit genau im Falle  $a = b$ .

I. Paasche, München

*Lösung:* Man sieht leicht ein, dass  $d = \frac{F}{R}$ ,  $h = 2R$ ,  $x = \sqrt{\frac{s-c}{r}}$  und  $y = \sqrt{\sin \gamma}$ . Man hat daher

$$\begin{aligned} x^3 + 2\sqrt{\frac{s}{r}} &\leq x \frac{s}{r} \Leftrightarrow \frac{s-c}{r} \sqrt{\frac{s-c}{r}} + 2\sqrt{\frac{s}{r}} \leq \sqrt{\frac{s-c}{r}} \cdot \frac{s}{r} \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{s}{r}} \leq \frac{c}{r} \sqrt{\frac{s-c}{r}} \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{s}{s-c}} \leq \frac{c}{r} \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{r_c}{r}} \leq \frac{c}{r} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{r r_c} \leq \frac{c}{2} \Leftrightarrow \sqrt{(s-a)(s-b)} \leq \frac{(s-a) + (s-b)}{2}. \end{aligned}$$

Und weiter:

$$y^3 + 2 \sqrt{\frac{d}{h}} \leq 2 y \frac{s}{h} \Leftrightarrow \sin \gamma \sqrt{\sin \gamma} + \sqrt{\frac{2F}{R^2}} \leq \frac{s}{R} \sqrt{\sin \gamma}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2F}{\sin \gamma}} \leq s - R \sin \gamma \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq s - \frac{c}{2} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Die Richtigkeit beider Ungleichungen (mit Gleichheit genau für  $a = b$ ) folgt sofort aus der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Weitere Lösungen sandten L. Carlitz (Durham, N.C., USA) und H. Frischknecht (Berneck SG).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. Juli 1972**, wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

**Aufgabe 658.** If  $k$  is a positive integer and  $\varphi$  and  $J_k$  are the totient functions of Euler and Jordan, then show that for every positive integer  $n$

$$J_k(n) = \sum_{d_1 d_2 \dots d_k = n} \varphi(d_1) \varphi(d_2^2) \dots \varphi(d_k^k),$$

where the summation extends over all ordered  $k$ -tuples  $(d_1, \dots, d_k)$  such that  $d_1 \dots d_k = n$ .

D. Suryanarayana, Waltair, India

**Aufgabe 659.** Let  $L$  and  $M$  denote the sets of positive integers all of whose prime factors are of multiplicity  $\geq 2$  and  $\geq 4$ , respectively. The integer 1 is considered to be a member of both  $L$  and  $M$ . Show that for every positive integer  $k$

$$\sum_{n \in L} \frac{\lambda(n)}{J_k(n)} = \zeta(2k) \quad \text{and} \quad \sum_{n \in M} \frac{\lambda(n)}{J_k(n)} = \frac{\zeta(4k) \zeta(6k)}{\zeta(12k)},$$

where  $\lambda$  is Liouville's function and  $J_k$  Jordan's totient function.

D. Suryanarayana, Waltair, India

**Aufgabe 660.** *Voraussetzung:*  $\mathbf{X}(t)$  sei eine geschlossene  $C^4$ -Kurve im dreidimensionalen euklidischen Raum, die von jeder Ebene durch  $\mathbf{O}$  in höchstens zwei Punkten geschnitten wird. Der Parameter  $t$  sei so gewählt, dass  $\det(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \mathbf{X}'') = 1$ . Dann ist die Kurve  $\mathbf{X}$  (das heisst das Tripel ihrer Koordinatenfunktionen) Lösung der Differentialgleichung

$$x'' + px' + qx = 0$$

(alle Kurven, die Lösungen sind, sind untereinander affin mit einer linearen (= homogenen) Transformation mit Determinante  $\pm 1$ ).

*Behauptung:* Entweder ist  $q = p'$ , oder  $F(t) = q - p'$  wechselt wenigstens viermal das Vorzeichen auf der Kurve. H. Guggenheimer, Brooklyn, N.Y., USA

**Aufgabe 661.** For a triangle with circumradius  $R$ , semiperimeter  $s$ , sides  $a, b, c$ , contact segments  $s_a, s_b, s_c$ , exradii  $r_a, r_b, r_c$  and altitudes  $h_a, h_b, h_c$ , prove the inequalities

$$\frac{r_a}{a} + \frac{r_b}{b} + \frac{r_c}{c} \geq \frac{s}{R}, \quad (1)$$

$$\frac{h_a}{s_a} + \frac{h_b}{s_b} + \frac{h_c}{s_c} \geq \frac{2s}{R} \quad (2)$$

with equalities if and only if the triangle is equilateral.

Z. M. Mitrović, Vranje, Yugoslavia

## Literaturüberschau

*General Topology and its Applications—a Journal Devoted to Set Theoretic, Axiomatic and Geometric Topology.* Eine neue (vierteljährliche) Zeitschrift der North-Holland Publishing Company, Amsterdam. US \$ 20.00 pro Band. Das erste Heft erschien im April 1971.

Die Zeitschrift bringt in erster Linie kürzere Originalarbeiten, aber auch ausgewählte Übersichtsartikel. In Anbetracht der Stellung, die die Allgemeine Topologie als Grunddisziplin der heutigen Mathematik innehat, ist diese Publikation sehr erwünscht, um so mehr, als sie von best-ausgewiesenen Fachleuten betreut wird.

Kostenlose Probeexemplare können beim Verlag in Amsterdam (P.O. Box 3489) angefordert werden. J. Rätz

*Problems in Analysis—a Symposium in Honor of Salomon Bochner.* Edited by R. C. GUNNING. X und 351 Seiten. \$ 13.50. No. 31, Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

Das Symposium fand vom 1. bis 3. April 1969 zur Feier des 70. Geburtstages von S. BOCHNER (20. August 1969) an der Princeton University statt. Der Festband enthält in einem ersten Teil sieben Vorlesungen, die am Symposium gehalten wurden; die Autoren sind E. CALABI, S.-S. CHERN, H. FURSTENBERG, H. GRAUERT und O. RIEMENSCHNEIDER, S. KARLIN und J. MCGREGOR, J. F. C. KINGMAN, I. SEGAL. Der zweite Teil bringt siebzehn Originalartikel von Mathematikern, die in ihrer Arbeit von Bochner geführt, ermutigt oder inspiriert worden sind. Die Themen lauten: Linearization of the product of orthogonal polynomials; Eisenstein series on tube domains; Laplace-Fourier transformation, the foundation for quantum information theory and linear physics; An integral equation related to the Schrodinger equation with an application to integration in function space; A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian; The integral equation method in scattering theory; Group algebra bundles; Quadratic periods of hyperelliptic abelian integrals; The existence of complementary series; Some recent developments in the theory of singular perturbations; Sequential convergence in lattice groups; A group-theoretic lattice-point problem; The Riemann surface of Klein with 168 automorphisms; Envelopes of holomorphy of domains in complex Lie groups; Automorphisms of commutative Banach algebras; Historical notes on analyticity as a concept in functional analysis; A-almost automorphic function.