

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 28 (1973)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Über Peano-Kurven  
**Autor:** Wunderlich, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-29447>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

---

El. Math.

Band 28

Heft 1

Seiten 1-24

10. Januar 1973

---

## Über Peano-Kurven

### § 1. Einleitung

In der Differentialgeometrie ist es üblich, eine ebene Kurve unter Benützung kartesischer Koordinaten durch eine Parameterdarstellung  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  anzusetzen, wobei der Parameter  $t$  auf ein geeignetes Definitionsintervall beschränkt zu werden pflegt. Es war daher eine Sensation, als gegen Ende des vorigen Jahrhunderts Peano [6] nachwies, dass die naturgemässe Voraussetzung der Stetigkeit der Koordinatenfunktionen keineswegs hinreicht, um ein Gebilde zu erhalten, das dem gewöhnlichen Kurvenbegriff entspricht, sondern dass unter Umständen die Menge der Punkte  $p(x, y)$  ein ganzes Flächenstück lückenlos ausfüllen mag. Sein inzwischen klassisch gewordenes Beispiel (§ 4) zeigte, dass mittels geeignet konstruierter Abbildungsfunktionen  $x(t)$  und  $y(t)$ , die zwar stetig, jedoch nicht differenzierbar sind, das Einheitsintervall  $0 \leq t \leq 1$  stetig auf das Einheitsquadrat  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  abgebildet werden kann. Kombination mit einer passenden topologischen Abbildung würde dann auf die stetige Durchlaufung von beliebigen anderen einfach-zusammenhängenden Bereichen führen.

Hilbert [4] hat das Peanosche Beispiel unmittelbar darnach vereinfacht abgewandelt (§ 3), wobei er die rein arithmetische Definition Peanos durch eine anschaulichere geometrische ersetzte. Eine weitere Vereinfachung erzielte schliesslich Knopp [5], der statt eines Quadrats ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck verwendete (§ 5).

Im vorliegenden Aufsatz sollen diese Dinge anhand eines Verfahrens näher beleuchtet werden, das bei früherer Gelegenheit zu einer einheitlichen Erzeugung verschiedenartiger «pathologischer» Kurven herangezogen wurde [7], [8]. Das verwendete Abbildungsprinzip gestattet die explizite Auswertung der Zuordnung  $t \rightarrow p$  für alle rationalen  $t$  und liefert überdies hübsche ornamental-dekorative Veranschaulichungen der stetigen Flächendurchlaufungen mittels gewisser Näherungspolygone.

### § 2. Ein Erzeugungsprinzip für Peano-Kurven

Den Ausgang bildet ein bestimmter beschränkter, einfach-zusammenhängender und abgeschlossener *Fundamentbereich*  $F$  in der euklidischen Ebene, der stetig durchlaufen, also mit einer stetigen Parameterbelegung versehen werden soll.

Zu diesem Zweck wird vorausgesetzt, dass  $F$  in  $r \geq 2$  flächenhafte, untereinander kongruente und zu  $F$  ähnliche Teilbereiche  $F_k$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) zerlegt werden kann.<sup>1)</sup> Es sei möglich, die  $F_k$  so zu reihen, dass je zwei aufeinanderfolgende ein Randstück gemeinsam haben und dass  $F_1$  und  $F_r$  an den Rand von  $F$  grenzen. Diese bereits durch die Bezifferung gekennzeichnete Reihenfolge mag dadurch veranschaulicht werden, dass man geeignete korrespondierende Innenpunkte in ihrer Aufeinanderfolge durch Strecken verbindet. Das so entstehende, vom Eingangsfeld  $F_1$  zum Ausgangsfeld  $F_r$  führende und am Ende mit einer Pfeilspitze versehene Polygon heisse das *Grundmotiv* (vgl. die durch Doppellinien hervorgehobenen Grundmotive in den Figuren 1–6).

Nun werde ein *Abbildungskatalog* von (gleich- oder gegensinnigen) *Ähnlichkeits-transformationen*  $A_k: F \rightarrow F_k$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) zusammengestellt, der das Grundmotiv derart auf die Teilbereiche überträgt, dass das Ende des Bildmotivs in  $F_k$  zum Anfang des Bildmotivs in  $F_{k+1}$  unmittelbar benachbart ist. Falls dies möglich ist – eine hinreichende Bedingung wird sogleich angegeben werden –, so können die  $r$  Bildmotive durch  $r - 1$  einzufügende Verbindungsstrecken zu einem «Näherungspolygon 2. Ordnung» zusammengeschlossen werden. Die  $r$  durch die Ähnlichkeiten  $A_k$  erzeugten Bilder desselben lassen sich dann analog zu einem Näherungspolygon 3. Ordnung ergänzen, und dieses Verfahren kann beliebig fortgesetzt werden.

Der *Fixpunkt*  $a_k$  der Ähnlichkeitstransformation  $A_k$  kann als Grenzpunkt der abnehmenden Folge von ineinandergeschachtelten Teilbereichen  $A_k^n \cdot F$  für  $n \rightarrow \infty$  aufgefasst werden. Für den Ähnlichkeitsfaktor  $\lambda$  von  $A_k$  gilt nämlich  $\lambda^2 = 1/r \leq 1/2$  und daher  $\lambda^n \rightarrow 0$ . Neben  $a_1 \neq a_r$  sei nun das Bestehen der «Anschlussbedingungen»

$$A_k \cdot a_r = A_{k+1} \cdot a_1 \quad (k = 1, \dots, r - 1) \quad (1)$$

vorausgesetzt. Da der durch (1) erklärte Punkt  $b_k$  sowohl dem Teilbereich  $A_k \cdot F = F_k$  als auch dem Teilbereich  $A_{k+1} \cdot F = F_{k+1}$  angehört, so liegt er auf dem gemeinsamen Randstück von  $F_k$  und  $F_{k+1}$ . Hieraus folgt, dass  $a_1$  und  $a_r$  Randpunkte des Grundbereichs  $F$  sind.

Das *Zahlensystem mit der Basis  $r$*  benützend, wird hinfort eine Zahl des Definitionsintervalls  $0 \leq t \leq 1$  in der Form

$$t = 0, \tau_1 \tau_2 \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k r^{-k} \quad \text{mit } \tau_k = 0, 1, \dots, r - 1 \quad (2)$$

geschrieben. Diesem Parameterwert  $t$  wird nun jener Punkt  $p$  zugeordnet, der durch

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} T_1 T_2 \dots T_n \cdot F \quad \text{mit } T_k = A_{1+\tau_k} \quad (3)$$

erklärt ist. Da die Folge der auftretenden Teilbereiche monoton abnimmt und deren Durchmesser wegen  $\lambda < 1$  gegen Null strebt, so konvergiert sie mit  $n \rightarrow \infty$  gegen einen wohlbestimmten Punkt  $p$ . Die so definierte Abbildung des Parameterintervalls auf die Menge der Punkte des Fundamentalbereichs  $F$  ist *eindeutig* und *stetig*.

<sup>1)</sup> Das einfachste Beispiel ist neben dem Quadrat und dem gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck das Rechteck im Normformat, also mit dem Seitenverhältnis  $1:\sqrt{2}$ , das durch Halbierung in zwei ähnliche Rechtecke zerlegt wird. Andere ebene Figuren mit der genannten Zerlegungseigenschaft hat GOLOMB [3] untersucht; siehe auch GARDNER [2].

Zur Überprüfung der *Eindeutigkeit* sind jene Werte  $t$  zu betrachten, die durch einen endlichen  $r$ -adischen Bruch dargestellt werden, da solche Zahlen auch als unendlicher Bruch angeschrieben werden können:

$$t = 0, \tau_1 \dots \tau_m 00 \dots = 0, \tau_1 \dots \tau_{m-1} \tau'_m r' r' \dots \text{ mit } \tau'_m = \tau_m - 1, r' = r - 1. \quad (4)$$

Die Punkte  $p$  und  $p'$ , die der ersten bzw. zweiten Darstellung entsprechen, sind gemäss (3)

$$\left. \begin{aligned} p &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_1 \dots T_m A_1^n \cdot F = T_1 \dots T_{m-1} T_m \cdot a_1, \\ p' &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_1 \dots T_{m-1} T'_m A_r^n \cdot F = T_1 \dots T_{m-1} T'_m \cdot a_r. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Hierbei ist  $T'_m = A_{k-1}$ , wenn  $T_m = A_k$ ; mit Rücksicht auf (1) ist also  $T_m \cdot a_1 = T'_m \cdot a_r$  und daher  $p = p'$ .

Die *Stetigkeit* folgt ebenfalls aus der Anschlussbedingung (1), denn zwei Werten  $t$  und  $t'$ , welche die ersten  $n$  Ziffern nach dem Komma gemeinsam haben, entsprechen zwei im selben Teilbereich  $T_1 \dots T_n \cdot F$  gelegene Bildpunkte  $p$  und  $p'$ , deren Abstand sicher nicht grösser ist als  $\lambda^n d$ , wenn  $d$  den Durchmesser von  $F$  bedeutet. Der Abstand von  $p$  und  $p'$  kann daher beliebig klein gemacht werden, wenn  $t$  und  $t'$  sich nur genügend wenig unterscheiden.

Dass andererseits jeder Punkt  $p \in F$  durch einen (ein- oder mehrdeutig) bestimmten Parameterwert  $t$  erfasst wird, ist leicht einzusehen. Ist  $F_k = A_k \cdot F$  ein Teilbereich, dem  $p$  angehört, dann stellt  $\tau_1 = k - 1$  die 1. Ziffer von  $t$  dar. Wendet man anschliessend die inverse Transformation  $A_k^{-1}$  auf  $p$  an, so erhält man einen neuen Punkt  $p_1 \in F$ ; ist  $F_l = A_l \cdot F$  ein  $p_1$  enthaltender Teilbereich, dann hat man mit  $\tau_2 = l - 1$  die 2. Ziffer von  $t$  usf. Die genannten Teilbereiche sind jedoch nicht immer eindeutig bestimmt, so dass ein Punkt  $p$  unter Umständen mehreren Parameterwerten zugeordnet sein kann.

Für *rationale Parameterwerte*  $t$  fällt die  $r$ -adische Darstellung periodisch aus:

$$t = 0, \tau_1 \dots \tau_h \overline{\tau_{h+1} \dots \tau_{h+m}}, \quad (6)$$

wobei der Querstrich die Periode anzeigt. Der zugeordnete Punkt  $p$  ist dann festgelegt durch

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} T_1 \dots T_h (T_{h+1} \dots T_{h+m})^n \cdot F = T_1 \dots T_h \cdot u, \quad (7)$$

wobei  $u$  den Fixpunkt der Ähnlichkeitstranformation  $U = T_{h+m} \dots T_{h+m}$  bezeichnet. Der Punkt  $p$  lässt sich mithin in jedem Fall explizit angeben.

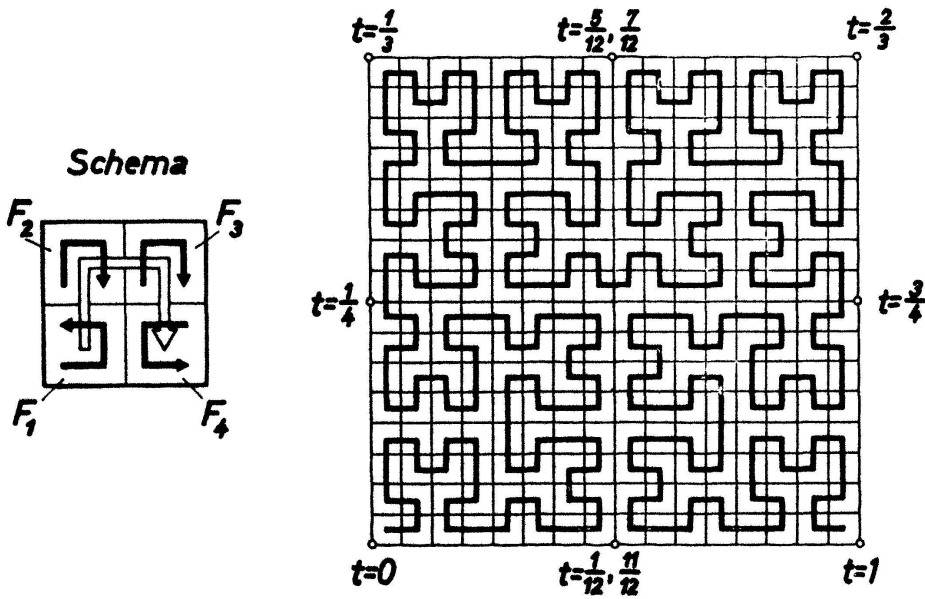
Bezeichnet  $q$  einen beliebigen Punkt von  $F$  und wendet man auf denselben sämtliche Transformationen  $T_1 T_2 \dots T_n$  an, die zu  $n$ -stelligen Brüchen  $t = 0, \tau_1 \tau_2 \dots \tau_n$  gehören, so erhält man eine geordnete Menge von  $r^n$  Punkten, die, in ihrer natürlichen Aufeinanderfolge durch Strecken verbunden, ein *Näherungspolygon  $n$ -ter Ordnung* von der Art der oben erwähnten ergeben. Solche Näherungspolygone vermitteln eine gute Vorstellung von der erreichten Durchlaufung des Bereichs  $F$  und bieten hübsche Anregungen für Kreuzstichmuster oder ähnliche Handarbeitsvoragen.

**§ 3. Die Hilbertsche Peano-Kurve**

Hier ist der Fundamentalbereich  $F$  das *Einheitsquadrat*  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ . Die Zerlegung erfolgt durch Ziehen der seitenparallelen Mittellinien in  $r = 4$  Teilquadrate. Die Reihung derselben liefert als Grundmotiv zwangsläufig einen *U-Haken*. Bei der Übertragung dieses Grundmotivs auf die vier Teilquadrate bleibt unter Beachtung der Anschlussforderung keine Willkür mehr offen, und man gelangt mit Benützung des Schemas in Figur 1 zu folgendem *Abbildungskatalog*:

$$\left. \begin{aligned}
 A_1: x' &= \frac{2}{1} y, & y' &= \frac{1}{2} x; \\
 A_2: x' &= \frac{1}{2} x, & y' &= \frac{1}{2} (1 + y); \\
 A_3: x' &= \frac{1}{2} (1 + x), & y' &= \frac{1}{2} (1 + y); \\
 A_4: x' &= \frac{1}{2} (2 - y), & y' &= \frac{1}{2} (1 - x).
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Nach Berechnung der Fixpunkte  $a_1 (x = x' = 0, y = y' = 0)$  und  $a_4 (x = x' = 1, y = y' = 0)$  bestätigt man, dass die drei Anschlussbedingungen (1) erfüllt sind:  $A_1 \cdot a_4 = A_2 \cdot a_1 = b_1 (0, 1/2)$ ,  $A_2 \cdot a_4 = A_3 \cdot a_1 = b_2 (1/2, 1/2)$ ,  $A_3 \cdot a_4 = A_4 \cdot a_1 = b_3 (1, 1/2)$ . Die genannten Punkte  $a_1, b_1, b_2, b_3, a_4$  gehören gemäss (4) und (5) der Reihe nach zu den Parameterwerten  $t = 0, 1/4, 1/2, 3/4$  und 1.



Figur 1  
 Näherungspolygon 4. Ordnung der Hilbertschen Peano-Kurve.

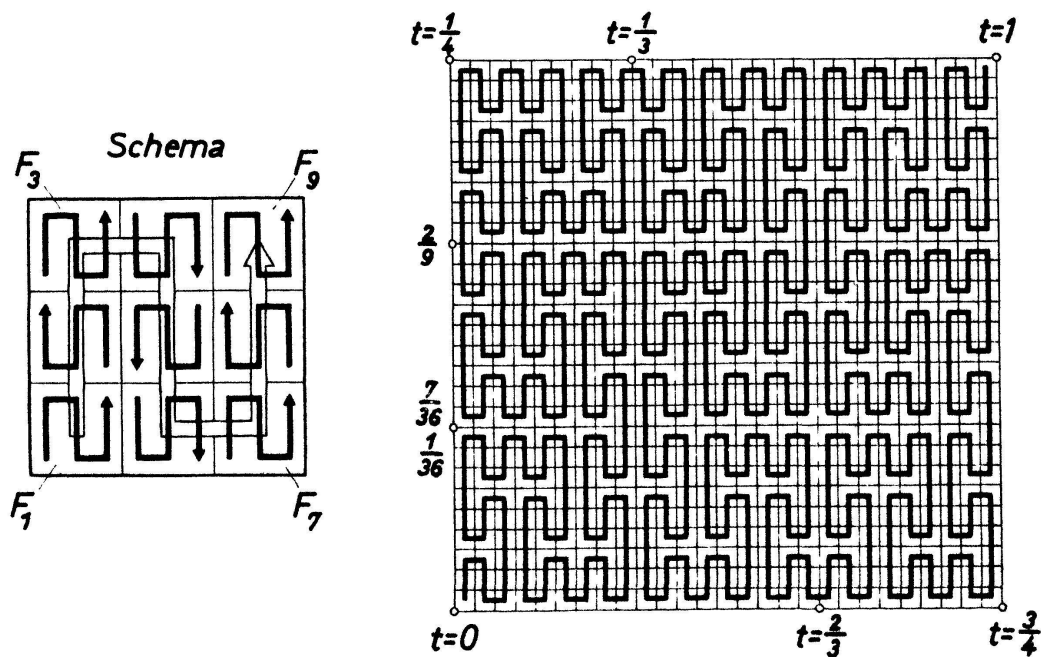
Als Beispiel für die Ermittlung eines rationalen Punktes der Peano-Kurve sei etwa der zu  $t = 13/15$  gehörige bestimmt. In dem zu verwendenden *Vierersystem* schreibt sich dieser Wert  $t = 0,3\overline{1}$ . Der entsprechende Punkt  $p$  fällt zufolge (7) mit dem Fixpunkt der Ähnlichkeitstranformation  $U = A_4 A_2$  zusammen, die gemäss (8) durch  $x' = (3 - y)/4, y' = (2 - x)/4$  dargestellt wird; die Koordinaten von  $p$  lauten daher  $x = 2/3, y = 1/3$ .

Fragt man umgekehrt nach dem Parameterwert, der etwa zur Quadratmitte  $q(1/2, 1/2)$  gehört, so stellt man in Befolgung der Vorschrift aus § 2 zunächst fest, dass  $q$  allen vier Teilquadraten  $F_k$  angehört. Entscheidet man sich beispielsweise für  $q \in F_1$ , also  $\tau_1 = 0$ , und transformiert man dementsprechend  $q$  mittels  $A_1^{-1}$  nach  $q_1(1, 1)$ , so ergibt sich aus  $q_1 \in F_3$  die zweite Stelle  $\tau_2 = 2$ . Bei der nächsten Transformation  $A_3^{-1}$  bleibt  $q_1$  fest, so dass auch alle folgenden Ziffern den gleichen Wert 2 haben. Es ergibt sich also  $t = 0,0\overline{2} = 1/6$ . – Hätte man hingegen mit  $q \in F_2$  oder  $q \in F_3$  begonnen, dann wäre man zu  $t = 1/2$  gelangt (s. o.  $b_2$ ), während  $q \in F_4$  auf  $t = 5/6$  geführt hätte<sup>2)</sup>.

Zur Konstruktion von *Näherungspolygonen* bietet sich vor allem dieser Mittelpunkt  $q$  an, der nach § 2 durch alle  $n$ -stelligen Transformationen  $T_1 T_2 \dots T_n$  abzubilden ist. Als 1. Approximation ( $n = 1$ ) stellt sich der U-Haken des Grundmotivs ein, als zweite ( $n = 2$ ) der durch Verbindung der Bildhaken im Schema von Figur 1 entstehende «zweiarmige Leuchter». Die Hauptfigur in Abbildung 1 zeigt das Näherungspolygon 4. Ordnung ( $n = 4$ ). – Die Gesamtlänge des Näherungspolygons  $n$ -ter Ordnung beträgt  $L_n = 2^n - 2^{-n}$ .

### § 4. Peano-Kurven des Neunersystems

Ähnlich wie durch die Hilbertsche Viertelung des quadratischen Fundamentalbereichs  $F$  lassen sich auch durch fortgesetzte *Neunteilung* des Quadrats Peano-Kurven gewinnen. Für die Anordnung der neun Teilquadrate  $F_1, \dots, F_9$  stehen allerdings *zwei Grundmotive* zur Verfügung: eine Reihung nach dem «Serpentinentyp», bei welcher Eingangsfeld und Ausgangsfeld diagonal gegenüberliegen (Fig. 2–4), und eine Reihung nach dem «Mäandertyp», bei welcher Eingangs- und Ausgangsfeld zwei Nachbarecken von  $F$  besetzen (Fig. 5).



Figur 2  
 Näherungspolygon 3. Ordnung einer Peano-Kurve vom Serpentinentyp 000 000 000.

<sup>2)</sup> Die hier verfolgte Vorgangsweise zur analytischen Erfassung der Abbildung  $t \rightarrow p$  oder ihrer Umkehrung ist übersichtlicher als die von BOREL [1] vorgeschlagene, die das Zweiersystem verwendet.

Im Falle des *Serpentinentyps* weist das Grundmotiv drei parallele Langseiten auf, deren Richtung bei der ähnlichen Übertragung in die Teilquadrate erhalten bleiben oder aber quergestellt werden kann. Diesen beiden gleichberechtigten Möglichkeiten mögen die Kennziffern 0 bzw. 1 zugewiesen werden; jedes Abbildungsschema wird dann durch eine neunstellige Binärzahl charakterisiert. Die Ausschöpfung aller Variationen führt mithin auf insgesamt  $2^9 = 512$  verschiedene Durchlaufungen, wenn man von kongruenten Modifikationen absieht.

Zur Kennzahl 000000000 etwa gehört der folgende, aus dem Schema von Figur 2 abzulesende *Abbildungskatalog*:

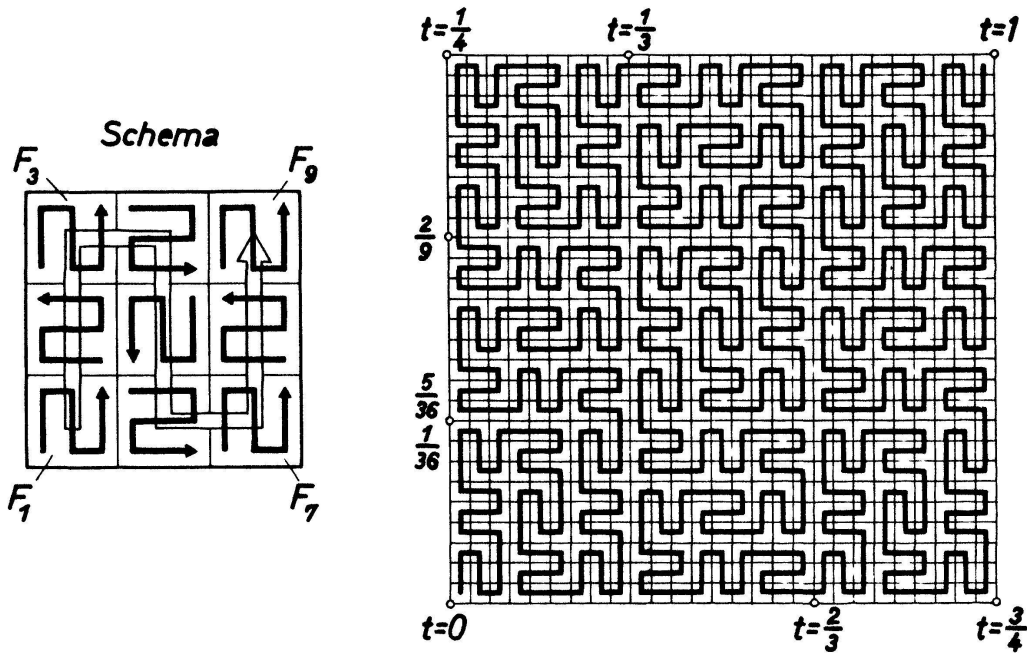
$$\left. \begin{aligned} A_1: x' &= \frac{1}{3} x, & y' &= \frac{1}{3} y; \\ A_2: x' &= \frac{1}{3} (1 - x), & y' &= \frac{1}{3} (1 + y); \\ A_3: x' &= \frac{1}{3} x, & y' &= \frac{1}{3} (2 + y); \\ A_4: x' &= \frac{1}{3} (1 + x), & y' &= \frac{1}{3} (3 - y); \\ A_5: x' &= \frac{1}{3} (2 - x), & y' &= \frac{1}{3} (2 - y); \\ A_6: x' &= \frac{1}{3} (1 + x), & y' &= \frac{1}{3} (1 - y); \\ A_7: x' &= \frac{1}{3} (2 + x), & y' &= \frac{1}{3} y; \\ A_8: x' &= \frac{1}{3} (3 - x), & y' &= \frac{1}{3} (1 + y); \\ A_9: x' &= \frac{1}{3} (2 + x), & y' &= \frac{1}{3} (2 + y). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Nach Feststellung der Fixpunkte  $a_1 (0, 0)$  und  $a_9 (1, 1)$  bestätigt man, dass die Anschlussbedingungen (1) erfüllt sind. Mit Benützung des Quadratmittelpunktes  $q(1/2, 1/2)$  ergeben sich durch Anwendung aller  $n$ -stelligen Transformationen  $T_1 T_2 \dots T_n$  die Näherungspolygone, von denen Figur 2 das dritte ( $n = 3$ ) zeigt.

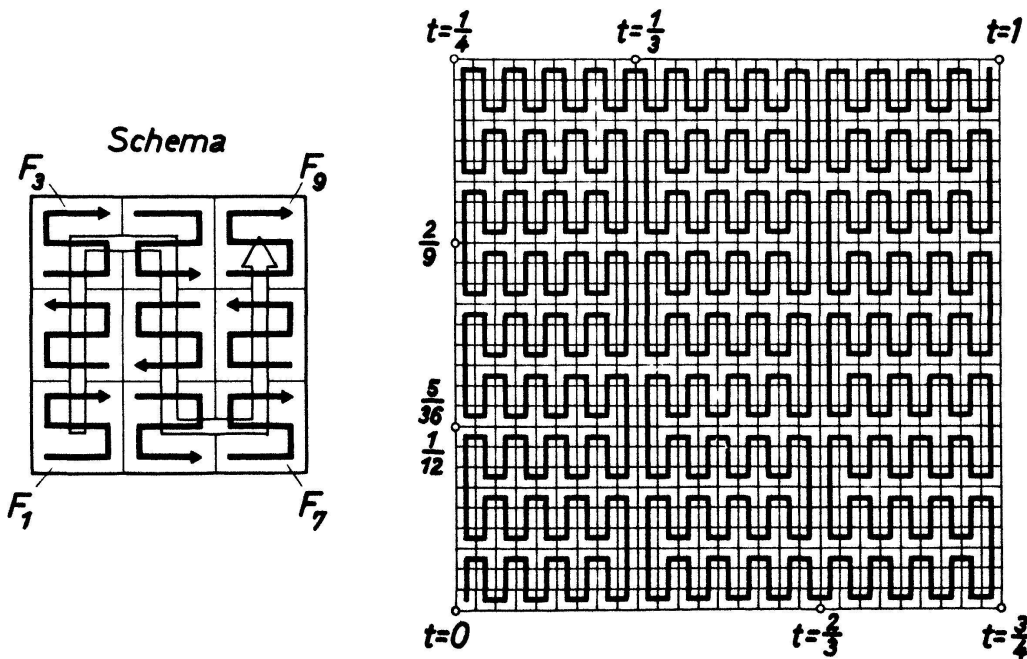
Die eben behandelte Annahme entspricht übrigens genau der von Peano [6] konstruierten Durchlaufung des Einheitsquadrats. Unter Verwendung des *Dreier-systems* definierte er nämlich die Zuordnung des Parameterwertes  $t = \tau_0 \tau_1 \tau_2 \tau_3 \dots$  (mit  $\tau_0 = 0$ ) zu den Koordinaten  $x = 0, \xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots$  und  $y = 0, \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots$  des Bildpunktes  $p$  durch die für  $n \geq 1$  geltenden Vorschriften

$$\left. \begin{aligned} \xi_n &= \begin{cases} \tau_{2n-1}, & \text{wenn } \tau_0 + \tau_2 + \dots + \tau_{2n-2} \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \pmod{2}, \\ 2 - \tau_{2n-1}, & \end{cases} \\ \eta_n &= \begin{cases} \tau_{2n}, & \text{wenn } \tau_1 + \tau_3 + \dots + \tau_{2n-1} \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \pmod{2}. \\ 2 - \tau_{2n}, & \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Der Übergang von  $t = 0, \tau_1 \tau_2 \dots$  zu  $t' = 0,00 \tau_1 \tau_2 \dots = t/9$  zieht den Übergang von  $x$  zu  $x' = 0,0 \xi_1 \xi_2 \dots = x/3$  und von  $y$  zu  $y' = 0,0 \eta_1 \eta_2 \dots = y/3$  nach sich, also von  $p$  zu  $A_1 \cdot p$ . Analog ergibt sich auch für die übrigen Abbildungen  $A_k$  des Katalogs (9),



Figur 3  
 Näherungspolygon 3. Ordnung einer Peano-Kurve vom Serpentinotyp 010 101 010.



Figur 4  
 Näherungspolygon 3. Ordnung einer Peano-Kurve vom Serpentinotyp 111 111 111.

dass sie durch den Übergang von  $t$  zu  $t' = (t + k - 1)/9$  induziert werden. Damit ist aber die Übereinstimmung der Peanoschen Abbildung mit der durch (9) vermittelten gesichert.

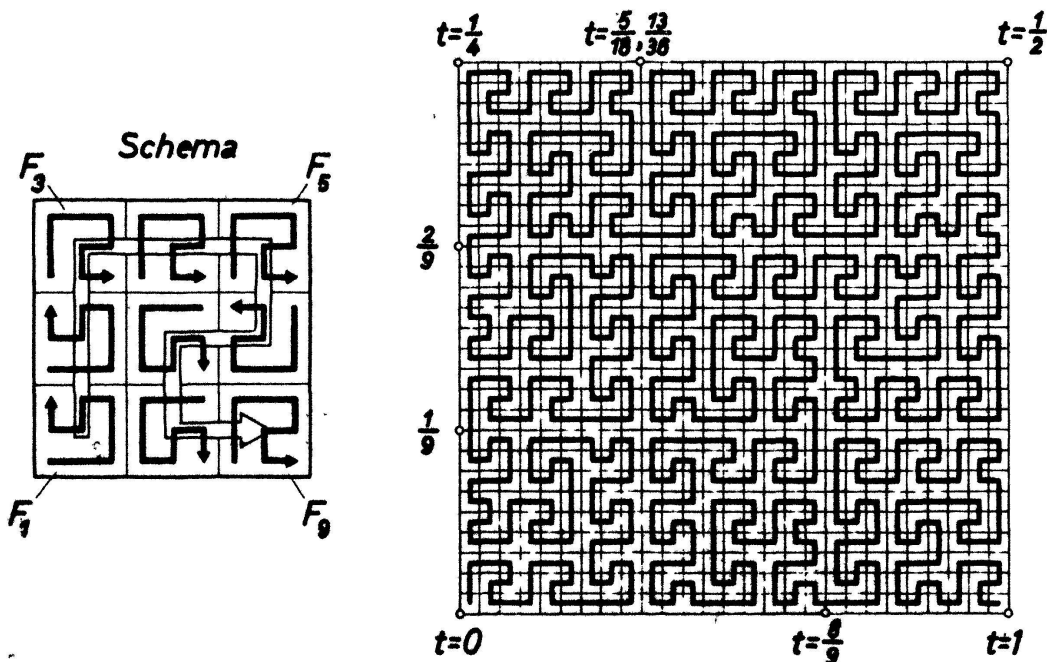
Beim Ersatz einer Ziffer 0 durch 1 an beliebiger Stelle der ursprünglichen Kennzahl 00000000 sind in der betreffenden Zeile des Abbildungskatalogs (9) bloss die Buchstaben  $x$  und  $y$  rechts vom Gleichheitszeichen zu vertauschen, was die Anschlussbedingungen offensichtlich nicht beeinträchtigt. Figur 3 und 4 veranschaulichen durch Näherungspolygone 3. Ordnung die Durchlaufungen mit den Kennzahlen 010 101 010 bzw. 111 111 111.



Im Falle des *Mäandertyps* beginnt das Grundmotiv mit zwei langen Seiten und endet mit vier kurzen. Bei der Übertragung in die Teilquadrate ergibt sich mit Rücksicht auf die zu bewahrende Orientierung im wesentlichen nur eine einzige Möglichkeit. Der zugehörige *Abbildungskatalog* lautet auf Grund des Schemas in Figur 5:

$$\begin{aligned}
 A_1: x' &= \frac{1}{3} y, & y' &= \frac{1}{3} x; \\
 A_2: x' &= \frac{1}{3} y, & y' &= \frac{1}{3} (1 + x); \\
 A_3: x' &= \frac{1}{3} x, & y' &= \frac{1}{3} (2 + y); \\
 A_4: x' &= \frac{1}{3} (1 + x), & y' &= \frac{1}{3} (2 + y); \\
 A_5: x' &= \frac{1}{3} (2 + x), & y' &= \frac{1}{3} (2 + y); \\
 A_6: x' &= \frac{1}{3} (3 - x), & y' &= \frac{1}{3} (2 - y); \\
 A_7: x' &= \frac{1}{3} (2 - y), & y' &= \frac{1}{3} (2 - x); \\
 A_8: x' &= \frac{1}{3} (2 - y), & y' &= \frac{1}{3} (1 - x); \\
 A_9: x' &= \frac{1}{3} (2 + x), & y' &= \frac{1}{3} y.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Nach Bestimmung der Fixpunkte  $a_1 (0,0)$  und  $a_9 (1,0)$  bestätigt man das Bestehen der Anschlussbedingungen (1). Figur 5 veranschaulicht die Durchlaufung des Quadrats mittels des wiederum vom Mittelpunkt  $q (1/2, 1/2)$  abgeleiteten Näherungspolygons 3. Ordnung. – Die Länge eines solchen Näherungspolygons  $n$ -ter Ordnung beträgt (wie beim Serpentinentyp auch)  $L_n = 3^n - 3^{-n}$ .



Figur 5  
Näherungspolygon 3. Ordnung der Peano-Kurve vom Mäandertyp.

Analoge Entwicklungen können selbstverständlich auch für Zerlegungen des Quadrats in  $r = s^2$  Felder mit  $s = 4, 5, \dots$  vorgenommen werden, wobei naturgemäss eine Zunahme der brauchbaren Grundmotive zu erwarten ist.

**§ 5. Die Knoppsche Peano-Kurve**

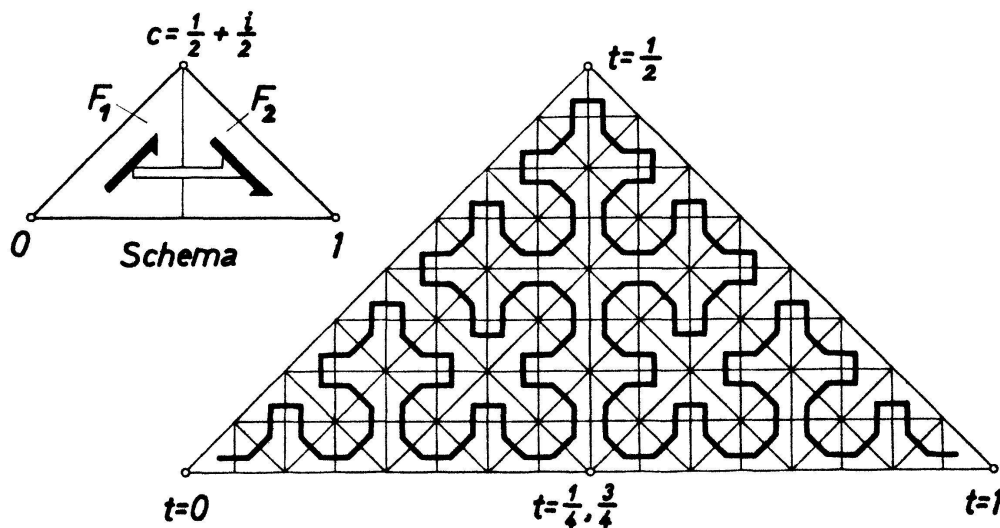
Hier ist der Fundamentalbereich  $F$  ein *gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck*, das durch die Mittelsenkrechte der Hypotenuse in  $r = 2$  dazu ähnliche Dreiecke  $F_1$  und  $F_2$  zerlegt wird. Bei Verwendung der Gaußschen Zahlenebene, in der die Ecken von  $F$  durch  $a = 0, b = 1$  und  $c = (1 + i)/2$  festgelegt seien, lautet der *Abbildungskatalog*:

$$A_1: z' = c \bar{z}, \quad A_2: z' - 1 = \bar{c} (\bar{z} - 1). \tag{12}$$

Mittels der Fixpunkte  $a_1 = 0$  und  $a_2 = 1$  bestätigt man das Bestehen der Anschlussbedingung (1).

Die Berechnung der Bildpunkte  $p$  für rationale, im Zweiersystem anzuschreibende Parameterwerte  $t$  gemäss (7) geht leicht vonstatten. Als Beispiel sei etwa der zu  $t = 1/3 = 0,0\bar{1}$  gehörige Punkt  $p$  ermittelt: Er ist der Fixpunkt der Ähnlichkeitstransformation  $U = A_1 A_2$ , die durch  $z' = c \bar{c} + c^2 z$  beschrieben wird; hieraus ergibt sich  $z = z' = c \bar{c} / (1 - c^2) = (2 + i)/5$ , was  $p$  durch  $x = 2/5, y = 1/5$  festlegt<sup>3)</sup>.

Nimmt man zwecks Herleitung von *Näherungspolygonen* den Ausgang vom Inkreismittelpunkt  $q = 1/2 + i/2 (\sqrt{2} - 1)$  des Fundamentaldreiecks  $F$ , so erscheint als Grundmotiv eine Strecke von der Länge  $s = (2 - \sqrt{2})/2$ , und die daraus entste-



Figur 6  
Näherungspolygon 7. Ordnung der Knoppschen Peano-Kurve.

henden Näherungspolygone haben jeweils gleiche Seiten mit Richtungsänderungen von  $\pm 135^\circ$  und  $\pm 90^\circ$ . Das Polygon  $n$ -ter Ordnung besitzt  $2^n - 1$  Seiten der Länge  $2^{(1-n)/2} s$ . Figur 6 zeigt das Näherungspolygon 7. Ordnung.

W. Wunderlich, TH Wien

<sup>3)</sup> Eine direkte Kennzeichnung der zu rationalen Werten  $t$  gehörigen Punkte  $p$  wäre nicht ohne Interesse.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] E. BOREL, *Éléments de la théorie des ensembles* (Paris 1949), Note IV.
- [2] M. GARDNER, *Further mathematical diversions* (London 1970), Chapter 19.
- [3] S. W. GOLOMB, *Replicating Figures on the Plane*, Math. Gaz. 48, 403–412 (1964).
- [4] D. HILBERT, *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück*, Math. Ann. 38, 459–460 (1891).
- [5] K. KNOPP, *Einheitliche Erzeugung und Darstellung der Kurven von Peano, Osgood und v. Koch*, Arch. Math. Phys. 26, 103–115 (1917).
- [6] G. PEANO, *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, Math. Ann. 36 157–160, (1890).
- [7] W. WUNDERLICH, *Irregular Curves and Functional Equations*, Ganita (Proc. Benares Math. Soc. ) 5, 215–230 (1954).
- [8] W. WUNDERLICH, *Una generazione comune di diverse curve patologiche*, Atti VI Congr. U.M.I. (Napoli 1959), 426–427.

## Über die Gauss-Krümmung der Real- und Imaginärteilflächen analytischer Funktionen

### 1. Einleitung

Beziehungen zwischen der Differentialgeometrie und der Funktionentheorie lassen sich dadurch gewinnen, dass man analytischen Funktionen  $f(z)$  jeweils gewisse Flächen zuordnet, die differentialgeometrischen Eigenschaften dieser «geometrischen Modelle» der betreffenden Funktionen untersucht und dabei funktionentheoretische Ergebnisse durch differentialgeometrische Begriffe ausdrückt. Brauchbar sind für diesen Zweck vor allem die Betragflächen und die Real- und Imaginärteilflächen. Einschlägige Arbeiten stammen u. a. von Ullrich [9] und seiner Schule sowie von Gackstatter [3], der die Nevanlinnasche Theorie der meromorphen Funktionen behandelt. In der vorliegenden Arbeit betrachten wir einige einfache geometrische Eigenschaften von Real- und Imaginärteilflächen, die für den genannten differentialgeometrisch-funktionentheoretischen Zusammenhang von Interesse sind.

### 2. Eine Abbildungseigenschaft

Einer analytischen Funktion  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  ordnen wir die Realteilfläche  $R(f)$ , definiert durch

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, u(x, y)) , \quad (1)$$

und die Imaginärteilfläche  $I(f)$ , definiert durch

$$\mathbf{r}^*(x^*, y^*) = (x^*, y^*, v(x^*, y^*)), \quad (2)$$

zu. Unter Benutzung der Cauchy-Riemann-Gleichungen ergibt sich, dass beide Flächen dieselbe Gauss-Krümmung

$$K = - \frac{|f''|^2}{(1 + |f'|^2)^2} \quad (3)$$

haben; vgl. [5], S. 318, und [7].