

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 28 (1973)  
**Heft:** 2

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] T. BONNESEN, *Über eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung des Kreises in der Ebene und auf der Kugeloberfläche nebst Anwendung auf eine Minkowskische Ungleichheit für konvexe Körper*, Math. Ann. 84, 216–227 (1921).
- [2] H. HADWIGER, *Kurzer Beweis der isoperimetrischen Ungleichung für konvexe Bereiche*. El. Math. 7–3, 111–112 (1946–48).
- [3] H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Berlin, Göttingen, Heidelberg (1957).
- [4] B. HERZ, *Über die Willssche Verallgemeinerung einer Ungleichung von Bonnesen*, Monatsh. f. Math. 75, 316–319 (1971).
- [5] L. FEJES TÓTH, *Elementarer Beweis einer isoperimetrischen Ungleichung*, Acta Math. Aca. Scient. Hungar. 1, 273–276 (1950).
- [6] J.M. WILLS, Vortrag auf der DMV-Tagung über konvexe Körper, Juli 1970.
- [7] J.M. WILLS, *Zum Verhältnis von Volumen und Oberfläche bei konvexen Körpern*, Arch. Math. 21, 557–560 (1970).

## Aufgaben

**Aufgabe 665.** Für nichtnegative ganze Zahlen  $n$  beweise man die Formel

$$\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{1}{k!} = 1.$$

I. Paasche, München

1. Lösung (mit Verallgemeinerung):  $\mathbf{C}$ : = Menge der komplexen Zahlen,  $\mathbf{N}$ : =  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ,

$$S_n(z) := \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} z^i \sum_{k=0}^{n-i} \frac{z^k}{k!}.$$

Durch die Substitution  $j := i + k$  kann diese Doppelsumme über die Gitterpunkte  $(i, k)$  mit  $0 \leq i + k \leq n$  auch als

$$S_n(z) = \sum_{j=0}^n z^j \cdot \sum_{i=0}^j (-1)^i \frac{1}{i! (j-i)!} = \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{j}{i}$$

geschrieben werden.

Wegen

$$\sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{j}{i} = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq 0 \\ 1 & \text{für } j = 0 \end{cases}$$

gilt für alle  $z \in \mathbf{C}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ :  $S_n(z) = 1$ .  $z = 1$  ist der zu beweisende Spezialfall.

G. Bach, Braunschweig, BRD

Second solution (with generalization): If

$$S_n(a) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{a^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{a^k}{k!},$$

then

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} S_n(a) x^n &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{a^i x^i}{i!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= e^{-ax} e^{ax} (1-x)^{-1} = (1-x)^{-1}, \end{aligned}$$

so that

$$S_n(a) = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

L. Carlitz, Durham, N. C., USA

Weitere Lösungen sandten F. Árpád (Zürich), G. Bach (2. Lösung), A. Bager (Hjørring, Dänemark), C. Bindschedler (Küsnacht, ZH), P. Bundschuh (Freiburg i. Br., BRD), J. Fehér (Pécs, Ungarn), H. Flanders (Tel Aviv, Israel), F. Götze (Jena, DDR), H. W. Gould (Morgantown, W. Va., USA; zwei Lösungen), H. Harborth (Braunschweig, BRD), P. Hohler (Olten), H. Kappus (Rodorsdorf, SO), O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), B. Marzetta (Basel), O. Reutter (Ochsenhausen, BRD), J. Schopp (Budapest), E. Teuffel (Kornthal, BRD), W. R. Umbach (Rottorf, BRD), R. E. Weisauer (Ludwigshafen, BRD), H. Wimmer (Graz, Österreich) und K. Zacharias (Berlin, DDR).

*Anmerkung der Redaktion:* Der Aufgabensteller weist auf den Zusammenhang mit der Klassifikation der Permutationen von  $n$  Elementen nach der Anzahl  $k$  ihrer Fixelemente hin («problème des rencontres»; vgl. etwa J. Riordan, An introduction to combinatorial analysis, Wiley New York 1958, p. 57 ff.). Für die Anzahl  $D_{nk}$  dieser Permutationen gilt

$$D_{nk} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!},$$

und  $n! = \sum_{k=0}^n D_{nk}$  erweist sich wegen

$$\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

als gleichwertig mit der Behauptung dieser Aufgabe. Für  $k = 0$  liegt das Euler-Bernoullische Problem der vertauschten Briefe vor (vgl. etwa H. Dörrie, Triumph der Mathematik, Breslau 1933, p. 18 ff).

**Aufgabe 666.** Sei  $V$  ein Rechts- $K$ -Vektorraum vom Range 4. Der Verband der Unterräume von  $V$  heisst projektiver Raum vom Range 4 über  $K$ , geschrieben  $L(V)$ .

$(Q_4)$  bezeichne folgenden Schliessungssatz:

$A, B, C, D$  seien Punkte von  $L(V)$  mit  $V = A \oplus B \oplus C \oplus D$ . Sei  $a = A + B$ ,  $b = B + C$ ,  $c = C + D$ ,  $d = D + A$ .  $P_i$  seien Punkte von  $a$ ,  $Q_i$  seien Punkte von  $c$  für  $i = 1, 2, 3$ , welche von  $A, B, C, D$  verschieden sind. Gibt es dann zwei Geraden  $g_{12}$  und  $g_{23}$ , die von  $a, b$  verschieden sind, mit der Eigenschaft:  $g_{jk}$  trifft zugleich die

vier Geraden  $b, d, P_j + Q_k, P_k + Q_j$  für  $(j, k) = (1, 2), (2, 3)$ , so gilt für jede Gerade  $g_{13}$ , welche zugleich die Geraden  $b, d$  und  $P_1 + Q_3$  trifft:

$$g_{13} \cap (P_3 + Q_1) \neq \{0\}.$$

Man beweise: Genau dann gilt in  $L(V)$  der Schliessungssatz  $(Q_4)$ , wenn in  $L(V)$  der Satz von Pappos gilt.

(Hinweis: Eine Lösung ohne Benutzung von Koordinaten ergibt sich unter Beachtung von Aufgabe 594). A. Herzer, Wiesbaden, BRD

*Lösung des Aufgabenstellers:* In  $L(V)$  gelte  $(Q_4)$ . Wir wählen den Spezialfall  $P_2 = P_3 = :P, Q_2 = Q_3 = :Q$ . Die Bedingung, dass eine Gerade  $g_{23}$  die drei Geraden  $b, d$  und  $P + Q$  trifft, ist stets erfüllbar und kann daher weggelassen werden. Also reduziert sich  $(Q_4)$  jetzt auf folgenden Schliessungssatz:  $a, c, g_{12}, g_{13}$  bilde eine Schar von paarweise windschiefen Geraden von  $L(V)$ ;  $b, d, P_1 + Q, P + Q_1$  sei eine zweite Schar von paarweise windschiefen Geraden. Existieren dann 15 Schnittpunkte von Elementen der ersten Schar mit Elementen der zweiten Schar, so auch der sechzehnte (es folgt nämlich nach  $(Q_4)$  dann  $g_{13} \cap (P + Q_1) \neq \{0\}$ ).

Dieser Schliessungssatz impliziert aber nach Dandelin den Satz von Pappos.

Nun gelte in  $L(V)$  umgekehrt der Satz von Pappos. Wir benutzen die Ergebnisse von Aufg. 594. Es ist  $V = b \oplus d$ , wobei  $b$  und  $d$  vom Rang 2 sind. Daher ist die Kollineationsgruppe  $\Gamma(b, d)$  transitiv auf den Punkten der Verbindungsgeraden von  $b$  und  $d$ , soweit die Punkte nicht in  $b$  oder  $d$  liegen.  $a, c, g_{ik}$  sind solche Verbindungsgeraden. Daher gibt es  $\sigma, \tau \in \Gamma(b, d)$  mit  $P_1^\sigma = P_2, P_2^\tau = P_3$ . Die Gerade  $P_1 + Q_2$  schneidet  $g_{12}$  und  $c$ , welche unter  $\sigma$  fest bleiben. Also schneidet auch die Gerade  $(P_1 + Q_2)^\sigma = P_1^\sigma + Q_2^\sigma$  die Verbindungsgeraden  $g_{12}$  und  $c$ , die zueinander windschief sind. Dann ist aber  $(P_1 + Q_2)^\sigma$  durch  $P_2, g_{12}$  und  $c$  schon eindeutig bestimmt:  $(P_1 + Q_2)^\sigma = P_2 + Q_1$ . Da mit  $Q_2$  auch  $Q_2^\sigma$  in  $c$  liegen muss, folgt insbesondere  $Q_2^\sigma = Q_1$ .

Durch Ersetzen von  $(1, 2)$  durch  $(2, 3)$  und von  $\sigma$  durch  $\tau$  erhält man ebenso  $Q_3^\tau = Q_2$ .

Es ist  $\Gamma(b, d)$  isomorph zur multiplikativen Gruppe des Körpers  $K$ , welcher wegen der Gültigkeit des Satzes von Pappos kommutativ ist. Daher ist  $\Gamma(b, d)$  abelsch, und es gilt  $\sigma\tau = \tau\sigma$ .

Nach Voraussetzung ist  $g_{13} \cap (P_1 + Q_3) \neq \{0\}$ .  $\sigma\tau$  ist eine Kollineation, welche  $g_{13}$  festlässt. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \{0\} \neq (g_{13} \cap (P_1 + Q_3))^{\sigma\tau} &= g_{13}^{\sigma\tau} \cap (P_1^{\sigma\tau} + Q_3^{\sigma\tau}) \\ &= g_{13} \cap (P_3 + Q_1). \end{aligned}$$

Das ist aber gerade die Aussage von  $(Q_4)$ .

Für den Satz von Dandelin vgl. etwa F. Bachmann, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, Springer Berlin-Göttingen-Heidelberg 1959, p. 254 ff.

**Aufgabe 667.** Für jede reelle  $a$  sei  $\|a\| := \min\{|a - n|; n \in \mathbb{Z}\}$  ( $\mathbb{Z}$ : Menge der ganzrationalen Zahlen), und  $g$  bezeichne die «goldene Zahl»  $(\sqrt{5} + 1)/2$ . Man beweise, dass die Reihen

$$\sum \|g^n\|, \quad \sum \|g^{2n}\|, \quad \sum \|g^{3n}\|$$

konvergent sind und dass für ihre Summen gilt:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \|g^n\| = 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|g^{2n}\| = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \|g^{3n}\|.$$

J.-P. Hornecker, Morangis, Essonne, France

*Lösung:* Es sei

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (g^n - \bar{g}^n) \quad (n \geq 1)$$

die  $n$ -te Fibonacci-Zahl,  $\bar{g} = (1 - \sqrt{5})/2$ , also

$$g^n = f_n g + f_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Dann ist

$$|g^n - f_{n-1} - f_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{5}} |\bar{g}^n (\bar{g} - g)| = |\bar{g}|^n = g^{-n} < \frac{1}{2},$$

somit

$$\|g^n\| = g^{-n} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Damit ergibt sich

$$\sum_{n=2}^{\infty} \|g^n\| = \sum_{n=2}^{\infty} g^{-n} = \frac{1}{g^2 - g} = 1$$

und weiter für beliebiges  $k \geq 2$ :

$$S_k := \sum_{n=0}^{\infty} \|g^{kn}\| = \sum_{n=1}^{\infty} g^{-kn} = \frac{1}{f_k g + f_{k-1} - 1}. \quad (*)$$

Für  $k = 2$  bzw.  $3$  ergeben sich die Werte  $1/g$  bzw.  $1/2g$ .

H. Kappus, Rodersdorf, SO

Weitere Lösungen sandten G. Bach (Braunschweig, BRD), A. Bager (Hjørring, Dänemark), C. Bindschedler (Küsnacht, ZH), P. Bundschuh (Freiburg i.Br., BRD), L. Carlitz (Durham, N.C., USA), H. Flanders (Tel Aviv, Israel), K. Grün (Linz, Österreich), H. Harborth (Braunschweig, BRD), O. Kuropatwa (Kützberg, BRD), B. Marzetta (Basel), E. Teuffel (Korntal, BRD), R. Weissauer (Ludwigshafen, BRD), H. Wimmer (Graz, Österreich) und K. Zacharias (Berlin, DDR).

*Anmerkung der Redaktion:* E. Teuffel bemerkt, dass aus (\*) gefolgert werden kann:  $S_k/S_{k+1}$  ist rational genau dann, wenn  $k = 2$ .

**Aufgabe 668.** Im projektiven dreidimensionalen Raum  $P_3$  haben drei Flächen zweiter Ordnung,  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , die keine Kurve gemeinsam haben, acht Punkte gemein. Man beweise: Sind diese acht Punkte alle verschieden und liegen vier von ihnen in einer Ebene, so liegen auch die restlichen vier Punkte in einer Ebene.

H. Günther, Dresden, DDR

*Solution:* Let  $Q_1, Q_2, Q_3$  be linearly independent quadratic forms in  $x_0, \dots, x_3$  so that  $Q_i = 0$  is the equation of  $\Phi_i$ . Let  $L = 0$  be the equation of the plane known to contain four of the common points, where  $L$  is a linear form. The three conic sections  $\{Q_i = 0, L = 0\}$  have four common points, so one of them must be in the pencil determined by the other two. That means  $\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \alpha_3 Q_3 = LM$  where  $M$  is a non-trivial linear form (and some  $\alpha_i \neq 0$ ). The plane  $M = 0$  obviously contains the remaining four common points.

Harley Flanders, Tel Aviv, Israel

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht, ZH) und W. Kienberger (Graz, Österreich).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. Oktober 1973**, wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

**Aufgabe 689.** Man gebe eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  reeller Zahlen so an, dass gilt: Zu jeder positiven reellen Zahl  $s$  existiert eine streng monotone Abbildung  $h_s: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  derart, dass die Potenzreihe

$$\sum a_{h_s(n)} z^{h_s(n)}$$

genau den Konvergenzradius  $s$  besitzt.

P. Dierolf, München

**Aufgabe 690.** Für den halben Umfang  $s$ , den Umkreisradius  $R$  und den Inkreisradius  $r$  eines Dreiecks beweise man

$$2s^2 \geq r [20R - r + \sqrt{3(12R + r)(4R - 5r)}] \geq 32Rr - 10r^2,$$

mit Gleichheit genau für  $a = b = c$ .

A. Bager, Hjørring, Dänemark

**Aufgabe 691.** Es bezeichnen  $\mathbf{C}$  die Menge der komplexen Zahlen und  $Re a$  den Realteil der komplexen Zahl  $a$ . Für jede der Funktionalgleichungen

$$Re[(f(z) - f(w))^2] = Re[(z - w)^2] \quad (z, w \in \mathbf{C}), \quad (1)$$

$$Re[(f(z) - f(w))^2] = |z - w|^2 \quad (z, w \in \mathbf{C}) \quad (2)$$

bestimme man die Menge aller Lösungen  $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ .

J. Rätz, Bern

**Aufgabe 692.** In der euklidischen Ebene soll eine abgeschlossene quadratische Scheibe der Seitenlänge 1 durch  $n$  kongruente abgeschlossene Kreisscheiben überdeckt werden. Mit  $R(n)$  wird der minimale Kreisradius bezeichnet, der eine solche Überdeckung ermöglicht. Offenbar ist  $R(1) = \sqrt{2}/2$ . Man berechne  $R(2)$ ,  $R(3)$ ,  $R(4)$  und (**Problem 692A**)  $R(5)$ .  $R(5)$  ist dem Aufgabensteller nicht bekannt.

P. Wilker, Bern