

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 28 (1973)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Ein isoperimetrisches Problem mit Nebenbedingung  
**Autor:** Herz, B. / Kaapke, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-29452>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Dann ist  $V(T_q) = q^{n-1} F(T_q) = 2q^{n-1} + 2(n-1)q^{n-2}$

und  $W_\nu(T_q) = 0$  ( $q^{n-2}$ ) für  $\nu = 2, \dots, n$ .

Wegen  $G(T_q) = 0$  folgt daraus mit  $q \rightarrow \infty$ :  $2b_1 + b_0 \leq 0$

und mit  $b_0 \leq 1$  folgt daraus  $b_1 \leq -1/2$ . Damit ist Satz 3 bewiesen.

J. M. Wills, TU Berlin

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BONNESEN-FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper* (New York, Chelsea Publ. Co. 1948).
- [2] J. BOKOWSKI und J. M. WILLS, *Eine Ungleichung zwischen Volumen, Oberfläche und Gitterpunktanzahl konvexer Mengen im  $R^3$* . Erscheint in Acta Math. Hung. Bd. 25.
- [3] H. GROEMER, *Eine Bemerkung über Gitterpunkte in ebenen konvexen Bereichen*, Arch. Math. 10, 62–63 (1949).
- [4] H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, (Springer, Berlin 1957).
- [5] H. HADWIGER, *Altes und Neues über konvexe Körper* (Birkhäuser, Basel 1955).
- [6] H. HADWIGER, *Volumen und Oberfläche eines Eikörpers, der keine Gitterpunkte überdeckt*. Math. Z. 116, 191–196 (1970).
- [7] L. K. HUA, *Abschätzungen von Exponentialsummen*, Enzyklopädie Math. Wiss. Bd. I, 2, 29 (Teubner, Leipzig 1959).
- [8] S. KRUPIZKA, *Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen konvexen Körpern*, Czechoslovak Math. J. 7 (82) 550–552 (1957).
- [9] M. NOSARZEWSKA, *Evaluation de la différence entre l'aire d'une région plane convexe et le nombre des points aux coordonnées entières couverts par elle*, Colloq. math. 1, 305–311 (1947).
- [10] J. E. REEVE, *On the Volume of Lattice Polyhedra*. Proc. Lond. math. Soc. (3) 7, 378–395 (1957).
- [11] J. E. REEVE, *A Further Note on the Volume of Lattice Polyhedra*. J. Lond. math. Soc. 34, 57–62 (1959).
- [12] WARMUS, *Kurzmitteilung*. Colloq. math. 1, 45–46 (1947).

## Ein isoperimetrisches Problem mit Nebenbedingung

Als Variante des klassischen isoperimetrischen Problems bestimmt Besicovitch in [1] u. a. solche konvexen Bereiche des euklidischen  $R^2$ , welche in einem gegebenen kompakten konvexen Bereich  $K$  enthalten sind und bei vorgegebenem Umfang  $F$  maximalen Flächeninhalt  $V$  liefern. Es zeigt sich, dass dabei die inneren  $\varrho$ -Hüllen  $K^\varrho$ ,  $\varrho \in [0, r]$ ,  $r =$  Inkugelradius von  $K$ , d. s. die abgeschlossenen Hüllen der Vereinigungen aller in  $K$  enthaltenen Kugeln vom Radius  $\varrho$ , eine ausgezeichnete Rolle spielen.

Wir interessieren uns in dieser Note für folgendes verwandte Problem im  $R^n$ ,  $n \geq 2$ :

Ist  $P$  ein konvexes Tangentialpolyeder an seine Inkugel  $S_r$ ,  $r > 0$ , also  $V(P)/F(P) = V(S_r)/F(S_r) = r/n$ , so suchen wir das (nach dem Auswahlprinzip sicher existierende)  $\max V(\Gamma)/F(\Gamma) \mid \Gamma$  konvex,  $S_r \subset \Gamma \subset P$  und die zugehörigen Extremalkörper.

Im  $R^2$  lautet das Ergebnis

$$\frac{V(\Gamma)}{F(\Gamma)} \leq \frac{V(P^{\varrho_0})}{F(P^{\varrho_0})} = \varrho_0 = \frac{[r V(P) - r^2 \sqrt{\pi} V(P)]}{[V(P) - \pi r^2]} \quad (1)$$

und Gleichheit gilt nur für  $\Gamma = P^{\varrho_0}$ .

Für  $n > 2$  ist das Problem noch offen, fest steht aber, dass i. a. die inneren Hüllen  $P^\varrho$  dann nicht mehr Extremalkörper sind, wie ein Beispiel<sup>1)</sup> am Ende dieser Note zeigt.

Beweis von (1):<sup>2)</sup> Sei  $\Gamma_0$  ein Extremalbereich im Sinne der Aufgabenstellung und  $V(\Gamma_0)/F(\Gamma_0) = P_0$ . Offensichtlich ist  $F(\Gamma_0) \geq 2\pi r$ . Nun gibt es zum fest vorgeschriebenen  $F = F(\Gamma_0)$  einen isoperimetrischen Eibereich  $K_0$ ,  $K_0 \subset P$ ,  $F(K_0) = F(\Gamma_0)$  derart, dass  $V(K_0)$  den grösstmöglichen Wert von  $V$  repräsentiert. Also wird (a)  $P_0 \leq V(K_0)/F(K_0)$ .

Nach Besicovitch ([1], Variant III, S. 45 ff.) ist aber  $K_0$  eine innere  $\varrho$ -Hülle  $P^\varrho$ , und es gilt demnach  $S_r \subset K_0 \subset P$  und somit auch (b)  $p_0 \geq V(K_0)/F(K_0)$ . Demnach ist  $p_0 = V(K_0)/F(K_0)$ .

Setzt man  $f(\varrho) = V(P^\varrho)/F(P^\varrho)$ , so ist offenbar  $p_0$  das Maximum von  $f(\varrho)$  im Intervall  $[0, r]$ . Sind  $V, F$  die Masszahlen von  $P$ ,  $rF = 2V$ , so ergibt sich

$$f(\varrho) = \frac{[V(r^2 - \varrho^2) + \pi r^2 \varrho^2]}{r[F(r - \varrho)\varrho] + 2\pi r},$$

eine in  $[0, r]$  konkave Funktion, und nach elementarer Ausrechnung die rechte Seite von (1).

Im  $R^3$  seien  $P_m$ ,  $m = 3, 4, 5 \dots$  gerade Zylinder mit der Höhe  $h = 2$  und regelmässigen  $m$ -Ecken mit Inkreisradius  $r = 1$  als Grundfläche. Also  $P_m$  Tangentialpolyeder an die Einheitskugel  $S$  und im Sinne der Blaschkeschen Metrik  $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m = T$ , wobei  $T$  ein gerader Kreiszyylinder mit  $r = 1$  und  $h = 2$  ist. Wäre wie im  $R^2$  für jedes  $m$  eine innere  $\varrho$ -Hülle  $P_m^{\varrho(m)}$ ,  $\varrho(m) \in [0, 1]$ , von  $P_m$  Extremalkörper im Sinne unserer Fragestellung, so gäbe es eine Teilfolge  $m_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ , mit  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varrho(m_\nu) = \varrho_0$ ,  $\varrho_0 \in [0, 1]$ ,  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_{m_\nu}^{\varrho(m_\nu)} = T^{\varrho_0}$ , und es müsste gelten

$$\frac{V(T^{\varrho_0})}{F(T^{\varrho_0})} \geq \frac{V(\Gamma)}{F(\Gamma)} \quad \text{für jedes konvexe } \Gamma \text{ mit } S \subset \Gamma \subset T. \quad (2)$$

(2) gilt jedoch für kein  $\varrho_0 \in [0, 1]$ , wie wir im folgenden zeigen werden.

- a) Es ist  $V(T^0)/F(T^0) = V(T^1)/F(T^1) = 1/3$ , und eine leichte Rechnung zeigt  $d/d\varrho [V(T^\varrho)/F(T^\varrho)]|_{\varrho=0} > 0$ .
- b) Sei  $\Gamma_{\varrho,\lambda}$ ,  $\varrho \in (0, 1)$ ,  $\lambda \in (0, 1/\varrho)$ , der konvexe Körper, den man durch affine  $\lambda$ -Dilatation von  $T^\varrho$  in Richtung seiner Symmetrieachse und anschliessender Verkürzung des zylindrischen Anteils um die Länge  $2(\lambda - 1)$  erhält. Evident ist  $S \subset \Gamma_{\varrho,\lambda} \subset T$  und  $\Gamma_{\varrho,1} = T^\varrho$ . Wir bezeichnen  $F_\varrho' = \partial/\partial \varrho [F(\Gamma_{\varrho,\lambda})]|_{\lambda=1}$ ,  $F_\lambda' = \partial/\partial \lambda [F(\Gamma_{\varrho,\lambda})]|_{\lambda=1}$  und analog  $V_\varrho'$ ,  $V_\lambda'$ .

1) Dieses Beispiel wurde den Verfassern von H. Hadwiger zur genaueren Untersuchung vorgeschlagen.

2) Dieser Beweis wurde den Verfassern von H. Hadwiger mitgeteilt, nachdem sie einen elementaren aber längeren Beweis, der sich nicht auf das Ergebnis von Besicovitch stützte, vorgelegt hatten.

Eine etwas längere Rechnung ergibt dann

$$D = \begin{vmatrix} F'_e & V'_e \\ F'_\lambda & V'_\lambda \end{vmatrix} = \frac{\pi^2 \varrho^3}{3} [-3\pi^2 + 22\pi - 40] (1 - \varrho) \neq 0 \quad \text{für } \varrho \in (0, 1).$$

Also gibt es zu jedem  $T^e$ ,  $\varrho \in (0, 1)$  ein  $\Gamma_{e,\lambda}$  mit  $V(T^e)/F(T^e) < V(\Gamma_{e,\lambda})/F(\Gamma_{e,\lambda})$ .

B. Herz und J. Kaapke, TU Berlin

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. S. BESICOVITCH, *Variants of a Classical Isoperimetric Problem*, Quart. J. Math. Oxford, [II. Serie], 3, 42-49 (1952).

## Kleine Mitteilungen

### Über einige elementare Abschätzungen von $e$

In einer früheren kleinen Note [1] wurde die Zahl  $e$  durch einfache Ausdrücke nach unten und nach oben abgeschätzt. Diese Schranken sollen jetzt weiter verbessert werden.

**Satz 1.** Für  $x > 0$  gilt:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+0,5-1/8x} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2+x}} < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2+x+1/12}} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+0,5}.$$

*Beweis.* Es ist

$$\frac{1}{x+x^2} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Damit erhalten wir

$$\exp((x^2+x)^{-0,5}) > 1 + (x^2+x)^{-0,5} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{6} (x^2+x)^{-1,5} > 1 + \frac{1}{x},$$

weil

$$(x^2+x)^{-0,5} \cdot \frac{6x^2+6x+1}{6x^2+6x} > \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+1)}$$

wegen  $48x^2 + 12x + 1 > 45x^2 + 9x$  richtig ist.

Ist

$$x \geq 0,25, \quad \text{so folgt } x + 0,5 - \frac{1}{8x} > 0$$

und

$$\left(x + 0,5 - \frac{1}{8x}\right)^2 = x^2 + x - \frac{1}{8x} \left(1 - \frac{1}{8x}\right) < x^2 + x;$$

ist

$$0 < x < 0,25, \quad \text{so folgt } x + 0,5 - \frac{1}{8x} < x < \sqrt{x^2+x}.$$