

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 28 (1973)  
**Heft:** 3

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Eine etwas längere Rechnung ergibt dann

$$D = \begin{vmatrix} F'_e & V'_e \\ F'_\lambda & V'_\lambda \end{vmatrix} = \frac{\pi^2 \varrho^3}{3} [-3\pi^2 + 22\pi - 40] (1 - \varrho) \neq 0 \quad \text{für } \varrho \in (0, 1).$$

Also gibt es zu jedem  $T^e$ ,  $\varrho \in (0, 1)$  ein  $\Gamma_{e,\lambda}$  mit  $V(T^e)/F(T^e) < V(\Gamma_{e,\lambda})/F(\Gamma_{e,\lambda})$ .

B. Herz und J. Kaapke, TU Berlin

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. S. BESICOVITCH, *Variants of a Classical Isoperimetric Problem*, Quart. J. Math. Oxford, [II. Serie], 3, 42-49 (1952).

## Kleine Mitteilungen

### Über einige elementare Abschätzungen von $e$

In einer früheren kleinen Note [1] wurde die Zahl  $e$  durch einfache Ausdrücke nach unten und nach oben abgeschätzt. Diese Schranken sollen jetzt weiter verbessert werden.

**Satz 1.** Für  $x > 0$  gilt:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+0,5-1/8x} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2+x}} < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2+x+1/12}} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+0,5}.$$

*Beweis.* Es ist

$$\frac{1}{x+x^2} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Damit erhalten wir

$$\exp((x^2+x)^{-0,5}) > 1 + (x^2+x)^{-0,5} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) + \frac{1}{6} (x^2+x)^{-1,5} > 1 + \frac{1}{x},$$

weil

$$(x^2+x)^{-0,5} \cdot \frac{6x^2+6x+1}{6x^2+6x} > \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+1)}$$

wegen  $48x^2 + 12x + 1 > 45x^2 + 9x$  richtig ist.

Ist

$$x \geq 0,25, \quad \text{so folgt } x + 0,5 - \frac{1}{8x} > 0$$

und

$$\left(x + 0,5 - \frac{1}{8x}\right)^2 = x^2 + x - \frac{1}{8x} \left(1 - \frac{1}{8x}\right) < x^2 + x;$$

ist

$$0 < x < 0,25, \quad \text{so folgt } x + 0,5 - \frac{1}{8x} < x < \sqrt{x^2+x}.$$

Hiermit sind die Abschätzungen von  $e$  nach unten bewiesen. Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} \exp \left( \left( x^2 + x + \frac{1}{12} \right)^{-0,5} \right) &= 1 + \left( x^2 + x + \frac{1}{12} \right)^{-0,5} + \frac{1}{2} \left( x^2 + x + \frac{1}{12} \right)^{-1} \\ &+ \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left( x^2 + x + \frac{1}{12} \right)^{-0,5 \nu} < 1 + \left( x^2 + x + \frac{1}{12} \right)^{-0,5} + \frac{1}{2} \left( x^2 + x + \frac{1}{12} \right)^{-1} \\ &+ \frac{1}{6} \left( x^2 + x + \frac{1}{12} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{(x^2 + x + 1/12)^{0,5} - 0,25}. \end{aligned}$$

Dieser letzte Ausdruck ist kleiner als  $1 + 1/x$ , weil

$$\begin{aligned} \left( x^2 + x + \frac{1}{12} \right)^{-0,5} + \frac{1}{2} \left( x^2 + x + \frac{1}{12} \right)^{-1} + \frac{1}{6} \left( x^2 + x + \frac{1}{12} \right)^{-1} \\ \times \frac{1}{(x^2 + x + 1/12)^{0,5} - 0,25} < \frac{1}{x} \end{aligned}$$

wegen

$$6 \left( x^2 + x + \frac{1}{12} \right)^{0,5} + \frac{1}{(x^2 + x + 1/12)^{0,5} - 0,25} < 6x + 3 + (2x)^{-1}$$

erfüllt ist, denn diese Ungleichung ist gleichbedeutend mit

$$\frac{9}{16x} + \frac{1}{64x^2} < \frac{10}{16x} + \frac{1}{48x^2}.$$

Damit ist der Satz 1 bewiesen. Wenn man weitere Einschränkungen für  $x$  voraussetzt, kann die Abschätzung nach unten verschärft werden. So ergibt sich z. B.

## Satz 2.

Ist  $0 < c < \frac{1}{12}$  und  $x \geq \frac{1}{1-12c}$ , so gilt  $\left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x^3 + x + c}} < e$ .

Beweis. Wir brauchen jetzt nur zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \exp \left( (x^2 + x + c)^{-0,5} \right) &> 1 + (x^2 + x + c)^{-0,5} + \frac{1}{2} (x^2 + x + c)^{-1} \\ &+ \frac{1}{6} (x^2 + x + c)^{-1,5} > 1 + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

richtig ist. Mit der letzten Ungleichung sind aber gleichbedeutend die folgenden:

$$(x^2 + x + c)^{-0,5} \cdot \left( 1 + \frac{1}{6} (x^2 + x + c)^{-1} \right) > x^{-1} - \frac{1}{2} (x^2 + x + c)^{-1};$$

$$(6x^2 + 6x + 6c + 1)^2 > (x^2 + x + c) \left( 6x + 3 + \frac{6c}{x} \right)^2;$$

diese Ungleichung lässt sich unter Berücksichtigung der Voraussetzungen überführen in

$$3x^2(1-12c) + 3x(1-24c) + 1 > 72c^2 + 33c + \frac{72c^2}{x} + \frac{36c^3}{x^2}.$$

Die linke Seite ist wegen  $x(1-12c) \geq 1$  aber  $\geq 7$  und wegen  $c < 1/12$  und  $x > 1$  ist die rechte Seite  $< 4$ , sodass wir damit alles bewiesen haben.

H.-J. Kanold, TU Braunschweig

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H.-J. KANOLD, *Ein einfacher Beweis der Stirlingschen Formel*, *El. Math.* 24, 109–110 (1969)

### Über die diophantische Gleichung $(1 + \xi + \xi^2)(1 + \eta + \eta^2) = \zeta^2$

1. Wegen der Invarianz der quadratischen Form  $1 + \xi + \xi^2$  gegenüber der Transformation  $\xi = -\delta - 1$  und der Symmetrie der zu betrachtenden diophantischen Gleichung

$$(1 + \xi + \xi^2)(1 + \eta + \eta^2) = \zeta^2 \quad (1)$$

erhalten wir mit  $t \in \mathbb{Z}$  in  $(t, t, 1 + t + t^2)$  bzw.  $(t, -t - 1, 1 + t + t^2)$  unmittelbar zwei triviale Lösungstriple von (1). Wir stellen weiterhin fest, dass

$$(18, 2, 49) \quad (2)$$

$$(2, 653, 1729) \quad (3)$$

nichttriviale Lösungen von (1) sind, die wegen der bereits erwähnten Invarianz von  $1 + \xi + \xi^2$  und der Symmetrie von (1) zu weiteren Lösungstriple führen.

2. Man überzeugt sich nun weiter davon, dass die beiden folgenden Identitäten richtig sind:

$$\left. \begin{aligned} (1 + \xi + \xi^2)(1 + \eta + \eta^2) &= \left( \xi \eta + \frac{\xi + \eta}{2} + 1 \right)^2 + 3 \left( \frac{\xi - \eta}{2} \right)^2 \\ &\quad \text{für } \xi \equiv \eta \pmod{2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} (1 + \xi + \xi^2)(1 + \eta + \eta^2) &= \left( \xi \eta + \frac{\xi + \eta + 1}{2} - 1 \right)^2 \\ &\quad + 3 \left( \frac{\xi + \eta + 1}{2} \right)^2, \quad \xi \not\equiv \eta \pmod{2}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

so dass wir mit den entsprechenden Bezeichnungen in beiden Fällen auf die diophantische Gleichung

$$x^2 + 3y^2 = z^2 \quad (6)$$

geführt werden, die für  $x > 0$ ,  $y > 0$  und  $z > 0$  die Lösungen

$$x = \left| \frac{d}{2} (u^2 - 3v^2) \right|, \quad y = duv, \quad z = \frac{d}{2} (u^2 + 3v^2)$$

besitzt, wobei  $u$ ,  $v$  und  $d$  natürliche Zahlen sind und  $d$  eine gerade Zahl ist, wenn nicht  $u$  und  $v$  beide ungerade sind. (Siehe etwa [3], Kap. 5.3, Exercise 2)

3. Wir betrachten nun zunächst den Fall  $\xi \equiv \eta \pmod{2}$ . Dann ist:

$$x = \left| \frac{d}{2} (u^2 - 3v^2) \right| = \xi \eta + \frac{\xi + \eta}{2} + 1 \quad (7)$$

$$y = duv = \frac{\xi - \eta}{2} \quad (8)$$

$$z = \frac{d}{2} (u^2 + 3v^2) = \zeta, \quad (9)$$

woraus wir sofort

$$\zeta = \frac{d}{2} (u^2 + 3v^2), \quad \xi = 2duv + \eta \quad (10a)$$

erhalten. Setzen wir dann  $\xi = 2duv + \eta$  in (7) ein, so erhalten wir durch Auflösen einer quadratischen Gleichung für  $\eta$ :

$$\eta_{1,2} = -\frac{2duv + 1}{2} \pm \frac{1}{2} [4d^2u^2v^2 + 2|d(u^2 - 3v^2)| - 3]^{1/2}. \quad (10b)$$

Für  $d = 2$ ,  $u = 1$ ,  $v = 4$  wird die Quadratwurzel ganz, und man erhält die oben angegebene Lösung (2) von (1), wenn man das positive Vorzeichen der Wurzel berücksichtigt. Die Gleichungen (10a, b) leisten nun im Prinzip die Lösung der diophantischen Gleichung (1), abgesehen davon, dass wir jetzt die Fälle, d. h. Werte von  $d$ ,  $u$  und  $v$ , bestimmen müssen, für die

$$4d^2u^2v^2 + 2|d(u^2 - 3v^2)| - 3 = Q^2 \quad (11)$$

mit einer ganzen Zahl  $Q$  gilt. In dieser Hinsicht können wir nun beweisen:

**Satz 1.** Für  $\xi \equiv \eta \pmod{2}$  besitzt (1) unendlich viele Lösungen, die sich bereits bei festem  $d = 2$  und festem  $u = 1$  konstruktiv bestimmen lassen.

*Beweis:* Für festes  $d = 2$  und  $u = 1$  geht (11) über in

$$Q^2 - 28v^2 = -7. \quad (12)$$

Mit (12) betrachten wir gleichzeitig die Pellische Gleichung

$$Q^2 - 28v^2 = 1, \quad (13)$$

die die Fundamentallösung (127, 24) besitzt, (Siehe [2], S. 309). Mit der Fundamentallösung von (13) sind unendlich viele Lösungen von (13) bekannt ([1], Theorem 8.5).

Wenden wir dann auf Gleichung (12) Theorem 8.8 aus [1] an, indem wir die Lösung (21,4) von (12) mit heranziehen, so ist die Beh. von Satz 1 vollständig bewiesen.

Beispiel 1: Mit Hilfe von Satz 1 erhält man in (5355, 1012) ein weiteres Lösungspaar von (12), so dass sich für das Parametertripel  $(d, u, v) = (2, 1, 1012)$  die Lösung (4701, 653, 3072433) von (1) ergibt, wenn man in (10b) das positive Vorzeichen der Wurzel berücksichtigt. Es ist nämlich mit dem Kreisteilungspolynom  $F_n(x)$ :  $F_3(4701) \cdot F_3(653) = (7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 1777)^2$ .

4. Wir betrachten sodann den Fall  $\xi \not\equiv \eta \pmod{2}$ . Dann setzen wir nach 2.:

$$x = \left| \frac{d}{2} (u^2 - 3v^2) \right| = \xi \eta + \frac{\xi + \eta + 1}{2} - 1$$

$$y = duv = \frac{\xi + \eta + 1}{2}$$

$$z = \frac{d}{2} (u^2 + 3v^2) = \zeta,$$

woraus wir analog 3. erhalten:

$$\zeta = \frac{d}{2} (u^2 + 3v^2), \quad \xi = 2duv - \eta - 1 \quad (14)$$

und

$$\eta_{1,2} = \frac{2duv - 1}{2} \pm \frac{1}{2} [4d^2u^2v^2 - 2|d(u^2 - 3v^2)| - 3]^{1/2}. \quad (15)$$

Für  $d = 2, u = 41, v = 4$  wird die Quadratwurzel ganz, und man erhält für das positive Vorzeichen der Wurzel die oben angegebene Lösung (3) von (1). Wie unter 3. betrachten wir dann die diophantische Gleichung

$$4d^2u^2v^2 - 2|d(u^2 - 3v^2)| - 3 = P^2 \quad (16)$$

**Satz 2.** Für  $\xi \not\equiv \eta \pmod{2}$  besitzt (1) unendlich viele Lösungen, die sich bei festem  $d = 2$  und festem  $v = 4$  konstruktiv bestimmen lassen.

*Beweis:* Für festes  $d = 2$  und  $v = 4$  geht (16) über in

$$256u^2 - 4|u^2 - 48| - 3 = P^2, \quad (17)$$

und man überzeugt sich leicht davon, dass (17) für  $|u| < 7$  mit  $P \in \mathbb{Z}$  nicht möglich ist. Also erhalten wir für  $|u| \geq 7$

$$P^2 - 252u^2 = 189 \quad (18)$$

mit der Lösung (651,41). Die Gleichung (18) besitzt zwar auch die Lösung (21,1), die uns aber wegen  $|u| \geq 7$  nicht unmittelbar zu einer weiteren Lösung von (1) verhilft. Mit (18) gemeinsam betrachten wir (19)

$$P^2 - 252u^2 = 1 \quad (19)$$

mit der Fundamentallösung (127,8). Wenden wir nun wie beim Beweis von Satz 1 die Sätze 8.5 und 8.8 aus [1] an, so ist damit die Existenz unendlich vieler Lösungen auch

im Fall  $\xi \not\equiv \eta(2)$  bewiesen und ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung von nichttrivialen Lösungen geliefert.

Beispiel 2: Durch Anwendung von Satz 2 erhält man in (165333,10415) ein weiteres Lösungspaar von (18), mit dem sich für das Parametertripel  $(d, u, v) = (2, 10415, 4)$  die Lösung (165986, 653, 108472273) von (1) ergibt. Es ist nämlich:

$$F_3(165986) \cdot F_3(653) = (7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 43 \cdot 1459)^2.$$

Beispiel 3: Beim Beweis von Satz 2 haben wir bereits bemerkt, dass (18) die Lösung (21,1) besitzt, die nach den erwähnten Sätzen aus [1] zur Lösung (4683, 295) von (18) führt und damit zu dem Parametertripel  $(d, u, v) = (2, 295, 4)$ , mit dessen Hilfe wir die Lösung (4701, 18, 87073) von (1) bestimmen. Es gilt:

$$F_3(4701) \cdot F_3(18) = (7^2 \cdot 1777)^2.$$

Dieter Bode, Braunschweig

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. J. LE VEQUE, *Topics in Number Theory*, Vol. 1 (Reading, Mass. 1965).  
 [2] W. SIERPINSKI, *Elementary Theory of Numbers* (Warschau 1964).  
 [3] H. M. STARK, *An Introduction to Number Theory* (Chicago 1970).

### Eine Kennzeichnung endlicher nilpotenter Ringe

J. Levitzki [1; S. 441, Satz 6] zeigt, dass jeder nilpotente Ring [2; S. 206], der die Maximalbedingung für links- und rechtsseitige Ideale erfüllt, nilpotent [2; S. 200] ist. Demnach ist ein endlicher Ring genau dann nilpotent, wenn er nil ist. Diese Aussage kann verschärft werden:

*Ein endlicher Ring  $R$  ist genau dann nilpotent, wenn 0 das einzige idempotente Element [2; S. 208] von  $R$  ist.*

Zum Beweis dieses Satzes bleibt zu zeigen:

Ein endlicher Ring  $R$  ist genau dann nil, wenn 0 das einzige idempotente Element von  $R$  ist.

*Beweis:*  $N$  bezeichne die Menge der natürlichen Zahlen.

Sei  $R$  nil. Wir zeigen:

Für  $r \in R$  folgt aus  $r^2 = r$  stets  $r = 0$ .

Aus  $r^2 = r$  folgt  $r^{i+1} = r^i$  für alle  $i \in N$  und damit  $r^m = r$  für alle  $m \in N$ . Da  $R$  nil ist, gilt  $r^n = 0$  mit  $n \in N$ . Hiermit folgt weiter  $r = r^n = 0$ . Somit ist 0 das einzige idempotente Element eines nilpotenten Ringes.

Sei nun 0 das einzige idempotente Element eines Ringes  $R$ . Wir zeigen zuerst:

(1) Für  $r \in R$  und  $1 < n \in N$  folgt aus  $r^n = r$  stets  $r = 0$ .

O.B.d.A. sei  $n > 2$ , da die Gültigkeit der Aussage (1) für  $n = 2$  vorausgesetzt ist.

Aus  $r^n = r$  folgt

$$(r^{n-1})^2 = r^{2n-2} = r^{n-2} r^n = r^{n-2} r = r^{n-1}.$$

Da  $r^{n-1}$  demnach idempotent ist, gilt  $r^{n-1} = 0$ . Es folgt

$$r = r^n = r^{n-1} r = 0r = 0.$$

Wir zeigen weiter:

Ist  $R$  endlich und gilt (1), so ist  $R$  nil.

Sei  $r \in R$ . Da  $R$  endlich ist, sind nicht alle Potenzen  $r^i$  mit  $i \in N$  voneinander verschieden. Also gibt es  $n, m \in N$  mit  $m > n$ , so dass

$$r^{m-n} r^n = r^m = r^n .$$

Es folgt

$$(r^{m-n})^{j+1} r^n = (r^{m-n})^j r^n$$

für alle  $j \in N$  und hiermit weiter

$$(r^{m-n})^n r^n = r^n .$$

Somit ist

$$(r^n)^{m-n+1} = (r^n)^{m-n} r^n = (r^{m-n})^n r^n = r^n .$$

Nach (1) folgt hieraus  $r^n = 0$ . Demnach ist ein endlicher Ring  $R$  nil, wenn 0 das einzige idempotente Element von  $R$  ist.

Walter Streb, Pegnitz BRD

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] J. LEVITZKI, *Solution of a Problem of G. Koethe*, Amer. J. Math. 67, 437–442.  
 [2] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra, zweiter Teil*, (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1959).

## Aufgaben

**Aufgabe 669.** Es bedeute  $W$  einen Einheitswürfel der Kantenlänge 1 im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum  $R$  mit dem Ursprung  $0 \in R$  als Mittelpunkt. Der Einheitsvektor  $u$  kennzeichne eine Richtung in  $R$ . Das planare statische Moment von  $W$  bezüglich der durch den Ursprung 0 gehenden zu  $u$  orthogonalen Ebene  $\langle x, u \rangle = 0$  kann durch das sich über  $W$  erstreckende Integral

$$T_u = \int_W |\langle x, u \rangle| dx \quad (*)$$

dargestellt werden, wobei  $x$  den Ortsvektor eines in  $W$  variablen Punktes  $x$  und  $dx$  das Volumendifferential an der Stelle  $x$  anzeigen. Wie weiter oben soll die Eckklammer die Bildung des skalaren Produkts vorschreiben. – Es ist nachzuweisen, dass für alle  $n \geq 1$  und alle Richtungen  $u$  die Ungleichung

$$T_u \leq \frac{1}{4}$$

gilt. Wie unmittelbar ersichtlich, gilt Gleichheit für jede der  $2n$  Kantenrichtungen von  $W$ .

H. Hadwiger, Bern