

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 28 (1973)
Heft: 6

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

- [2] G. FERRERO, *Stems planari e BIB-Disegni*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 11, 1–18 (1970).
 [3] H. HEATHERLY and H. OLIVIER, *Near Domains*, to appear.
 [4] S. LIGH, *On the Additive Group of Finite Near Integral Domains and Simple d.g. Near-Rings*.
 Monatsh. Math., to appear.

Aufgaben

Aufgabe 681. Z bezeichne die Menge der ganzen rationalen Zahlen. Eine quadratische Form

$$a x^2 - b y^2 \quad (a, b \in Z; a b \neq 0) \quad (*)$$

heisse linear-invariant, falls es eine lineare Transformation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left[r, s, u, v \in Z; \begin{pmatrix} r & s \\ u & v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

so gibt, dass für alle $x, y \in Z$ gilt: $a x'^2 - b y'^2 = a x^2 - b y^2$. Man bestimme alle linear-invarianten quadratischen Formen (*). P. Wilker, Bern

Lösung (Zusammenfassung aus verschiedenen Einsendungen): Es genügt, den Fall $(a, b) = 1, a \geq 1$ zu betrachten. Die einzigen linear-invarianten quadratischen Formen (*) sind diejenigen, für welche die Pellische Gleichung

$$r^2 - k^2 a b = 1$$

Lösungen $(r, k) \in Z \times Z$ mit $r^2 \neq 1$ besitzt, also $x^2 + y^2$ und $a x^2 - b y^2$, wo $b \geq 1$ und $a b$ kein Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Lösungen sandten J. Binz (Bern), H. Kappus (Rodersdorf SO; zwei Lösungen), I. Paasche (München, BRD) und R. Wyss (Flumenthal SO).

Anmerkung der Redaktion: H. Flanders (Tel Aviv, Israel) weist darauf hin, dass die Theoreme 58 und 74 in L. E. Dickson, *Modern elementary theory of numbers* (University of Chicago Press, 1939, p. 57 und 80) die obige Aussage umfassen. Der dort betrachtete Fall der Formen $a x^2 + b x y + c y^2$ wurde auch von H. Kappus behandelt.

Aufgabe 682. Let $a(1) = 1, a(2) = -1$. Take their negative and construct the sequence $a(1) = 1, a(2) = -1, a(3) = -1, a(4) = +1$. Again take the negative of this and construct the sequence,

$$a(1) = 1, \quad a(2) = -1, \quad a(3) = -1, \quad a(4) = +1, \quad a(5) = -1, \quad a(6) = +1, \\ a(7) = +1, \quad a(8) = -1$$

and continue the process. Determine when $a(m) = +1$ and when it is -1 .

J. M. Gandhi, Macomb, Illinois, USA

Lösung (mit Verallgemeinerung): Es seien eine natürliche Zahl k und $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{-1, 1\}$ vorgegeben. Für $n = 0, 1, 2, \dots$ konstruiere man daraus die Folge (a_m) durch

$$a_m = -a_i \quad \text{für} \quad m = 2^n k + i, \quad 1 \leq i \leq 2^n k.$$

Für welche m ist $a_m = +1$?

$$F(x) = \left(\sum_{v=1}^k a_v x^{v-1} \right) \cdot \prod_{\mu=0}^{\infty} (1 - x^{2^\mu k}) = S(x) P(x)$$

ist erzeugende Funktion der Folge, a_m ist dabei der Koeffizient von x^{m-1} in der Summendarstellung von $F(x)$.

Es existieren q, r derart, dass $m - 1 = qk + r$ mit $0 \leq r \leq k - 1$. Die Potenz $x^{m-1} = x^r x^{qk}$ entsteht demnach durch Multiplikation des Gliedes x^r aus $S(x)$ mit dem Glied x^{qk} aus der Summendarstellung von $P(x)$. q ist auf eindeutige Art als Summe verschiedener Zweierpotenzen darstellbar. Deshalb entsteht x^{qk} auf eindeutige Weise als Produkt von Potenzen der Form $x^{2^\mu k}$, die aus verschiedenen Klammern von $P(x)$ stammen. Enthält die Dualdarstellung von q eine gerade Anzahl Ziffern 1, so hat x^{qk} den Koeffizienten 1, sonst -1 . Da x^r den Koeffizienten a_{r+1} besitzt, ergibt sich folgende Regel zur Bestimmung von a_m :

- (1) Darstellung $m - 1 = qk + r$ mit $0 \leq r \leq k - 1$;
- (2) q dual darstellen; $e(q)$ (= Anzahl Ziffern 1) bestimmen;
- (3) Ist $a_{r+1} = +1$ und $e(q)$ gerade oder $a_{r+1} = -1$ und $e(q)$ ungerade, so wird $a_m = +1$; $a_m = -1$ in den beiden anderen möglichen Fällen.

Im speziellen Fall von J. M. Gandhi lautet wegen $k = 2, 0 \leq r \leq 1, a_1 = 1, a_2 = -1$ die Regel: $m - 1$ dual darstellen; $a_m = +1$, wenn $e(m - 1)$ gerade ist und $a_m = -1$ sonst.

J. Binz, Bern

Weitere Lösungen sandten M. G. Beumer (Delft, Niederlande), J. Binz (Bern; zweite Lösung), C. Bindschedler (Küsnacht, ZH), P. Bundschuh (Freiburg i.Br., BRD), L. Carlitz (Durham, N.C., USA), H. Flanders (Tel Aviv, Israel), K. Grün (Linz, Österreich), H. Harborth (Braunschweig, BRD), H. Kappus (Rodorsdorf, SO), A. Makowski (Warszawa, Polen), I. Paasche (München, BRD) und O. Reutter (Ochsenhausen, BRD).

Anmerkung der Redaktion: I. Paasche weist darauf hin, dass dieselbe Zerlegung der Menge der natürlichen Zahlen auch in der Arbeit J. Lambek – L. Moser, On some two way classifications of integers, Canad. Math. Bull. 2 (1959) 85–89, betrachtet wird.

Aufgabe 683. Man ermittle alle Kegelschnittkurven, die eine gegebene Ellipse in vier reellen Schnittpunkten unter rechten Winkeln schneiden.

C. Bindschedler, Küsnacht, ZH

Lösung des Aufgabenstellers: Es sei $K_1 \equiv \alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) die Gleichung der gegebenen Ellipse. Ist $\alpha = \beta$, so genügen nur die Durchmesserpaare des

Kreises der Bedingung (andernfalls gingen vom Kreiszentrum vier Tangenten bzw. zwei Doppeltangenten des Kegelschnittes aus). Es sei also $\alpha \neq \beta$.

Ein Kegelschnitt der verlangten Art habe die Gleichung $K_2 \equiv A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0$. Die Steigungsmasse der Tangenten in einem gemeinsamen Punkt $P(x, y)$ von K_1 und K_2 sind

$$\mu_1 = -\frac{\alpha x}{\beta y} \quad \text{und} \quad \mu_2 = -\frac{A x + B y + D}{B x + C y + E}.$$

Die Bedingung $\mu_1 \mu_2 = -1$ liefert $K_3 \equiv \alpha A x^2 + (\alpha + \beta) B x y + \beta C y^2 + \alpha D x + \beta E y = 0$. Diese Gleichung stellt einen Kegelschnitt dar, der durch die vier Schnittpunkte von K_1 und K_2 gehen soll, also dem Büschel (K_1, K_2) angehören muss. Es muss also zwei reelle Zahlen λ_1, λ_2 geben derart, dass die Identität $K_3 \equiv \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$ besteht. Koeffizientenvergleichung ergibt

$$\begin{aligned} \alpha A = \lambda_1 \alpha + \lambda_2 A, \quad (\alpha + \beta) B = 2 \lambda_2 B, \quad \beta C = \lambda_1 \beta + \lambda_2 C, \quad \alpha D = 2 \lambda_2 D, \\ \beta E = 2 \lambda_2 E, \quad 0 = -\lambda_1 + \lambda_2 F. \end{aligned}$$

Diese Bedingungen sind, falls man zunächst von der Realität der Schnittpunkte absieht, auch hinreichend. Man findet leicht, abgesehen von den zerfallenden Kegelschnitten $x y = 0$, $x^2 = 0$, $y^2 = 0$, die folgenden vier Lösungssysteme für K_2 mit einem willkürlichen Parameter:

$$\mathfrak{B}_1: \alpha x^2 - \beta y^2 + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} + \lambda x y = 0,$$

$$\mathfrak{B}_2: \alpha x^2 + (2\alpha - \beta) y^2 + \frac{2\alpha - \beta}{\beta} + \lambda y = 0,$$

$$\mathfrak{B}_3: (2\beta - \alpha) x^2 + \beta y^2 + \frac{2\beta - \alpha}{\alpha} + \lambda x = 0,$$

$$\mathfrak{S}: \frac{\alpha}{\alpha - \lambda} x^2 + \frac{\beta}{\beta - \lambda} y^2 + \frac{1}{\lambda} = 0 \quad (\lambda \neq 0, \alpha, \beta).$$

Sollen nun die vier Schnittpunkte reell sein, so fallen die Büschel \mathfrak{B}_2 und \mathfrak{B}_3 weg (von den Scheiteln dieser Hyperbeln liegt stets einer innerhalb, der andere ausserhalb der Ellipse; also zwei imaginäre Schnittpunkte), und von der Schar \mathfrak{S} der mit K_1 konfokalen Kegelschnitte schneiden nur die Hyperbeln reell. Die Hyperbeln in \mathfrak{B}_1 schneiden K_1 ebenfalls in vier reellen Punkten, da die beiden reellen Grundpunkte dieses Büschels innerhalb von K_1 , aber auf verschiedenen Ästen der Hyperbel liegen.

Eine Teillösung sandte I. Paasche, München, BRD.

Aufgabe 684. Es seien m, n natürliche Zahlen. Einen geschlossenen Polygonzug im (m, n) -Geflecht (für $m = 2, n = 4$, vgl. Figur 1) nennen wir eine *Runde*, falls seine einzigen Richtungsänderungen auf der dem Geflecht umschriebenen Rechtecklinie stattfinden (vgl. Figur 2). Zwei Runden, die aus denselben Strecken bestehen, sollen als gleich gelten. Man bestimme die Anzahl $r(m, n)$ aller Runden im (m, n) -Geflecht.

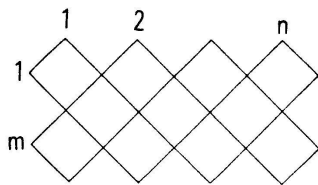


Fig. 1

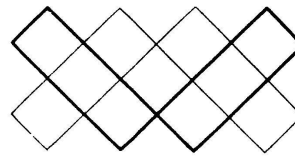


Fig. 2

M. Rätz (Amsterdam) und J. Rätz (Bern)

Lösung: Die Anzahl der verschiedenen Runden im Geflecht ist $k = (n, m)$, wo (n, m) den grössten gemeinsamen Teiler von n und m anzeigt. Beweis: Sei die linke untere Ecke des Rahmenrechteckes $R = R[a, b]$ Ursprung eines zu R parallel liegenden cartesischen Koordinatensystems. Die Länge einer Strecke des $n \times m$ -Geflechts sei die Einheit, so dass die Rechtecksseiten durch $a = n \sqrt{2}$ und $b = m \sqrt{2}$ gegeben sind. Es bezeichne nun S die durch sämtliche Spiegelungen der Ebene an den Geraden $x = u a$ und $y = v b$ (u, v ganz) erzeugte Gruppe, deren Elemente mit einer beliebigen Numerierung $s_i \in S$ (i natürlich) sein sollen.

Durch $G^* = \bigcup s_i G$ ist ein Geflecht gegeben, das die ganze Ebene E überzieht. Weiter stellt $\bigcup s_i R$ eine Parkettierung von E durch Spiegelbilder von R dar. S enthält als Normalteiler die Translationsgruppe T mit den Schiebungen $t = (2 u a, 2 v b)$ (u, v ganz). Sei nun H eine Teilstrecke des Geflechts G^* , so ist $K = \bigcup s_i^{-1} (s_i R \cap H)$ genau dann eine Runde in G , wenn H eine kürzeste Verbindungsstrecke zweier verschiedener Punkte P und Q von G^* ist, die bezüglich T äquivalent ausfallen, so dass $Q = P + w$ mit einem passenden $w \in T$ gilt. Ist $w = (2 p a, 2 q b)$ (p, q ganz), so muss offenbar $2 p a = \pm 2 q b$ oder $p n = \pm q m$ gelten, wobei $p^2 + q^2 > 0$ den kleinstmöglichen positiven Wert annehmen soll. Also muss $p = \pm m/k$ und $q = \pm n/k$ sein, wo $k = (n, m)$ wie eingangs erwähnt, der grösste gemeinsame Teiler von n und m ist. Die totale Länge h einer Runde ist demnach $h = |w| = 4 n m/k$. Wie leicht zu sehen ist, beträgt die gesamte Streckenlänge im Geflecht G aber $4 n m$, so dass sich für die Anzahl der verschiedenen Runden der Wert k ergibt, wenn noch beachtet wird, dass jede Strecke von G genau einer Runde angehört. Es sei noch vermerkt, dass die Länge jeder Runde durch $h = 4 [n, m]$ gegeben ist, wo $[n, m]$ das kleinste gemeinsame Vielfache von n und m bezeichnet.

H. Hadwiger, Bern

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bern), C. Bindschedler (Küsnacht, ZH), H. Brändli (Zürich), H. Flanders (Tel Aviv, Israel), H. Harborth (Braunschweig, BRD) und I. Paasche (München, BRD).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. Juni 1974**, wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Aufgabe 705. Es seien f, g zwei im abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ im eigentlichen Sinne Riemann-integrierbare reellwertige Funktionen mit $0 \leq g(x) \leq 1$ für

alle $x \in [0, 1]$ und $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Man beweise die Gültigkeit von

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq 4 \left[\int_0^1 g(x) f(x) dx \right]^2 \quad (*)$$

und finde einen Fall, in welchem in (*) Gleichheit besteht, evtl. aber sogar eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichheit in (*).

H. Hadwiger, Bern

Aufgabe 706. Es bezeichnen w_a, w_b, w_c die Längen der Winkelhalbierenden und a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks. Man beweise, dass

$$4 (w_b w_c + w_c w_a + w_a w_b) \leq 3 (bc + ca + ab)$$

mit Gleichheit genau im gleichseitigen Dreieck.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Aufgabe 707. In der affinen Ebene sei das durch zwei linear unabhängige Vektoren a, b erzeugte Punktgitter

$$\Gamma := \{r a + s b; \quad r, s \text{ ganzzahlige Zahlen}\}$$

gegeben. Man bestimme die kleinste natürliche Zahl G so, dass es unter G Punkten von Γ stets deren drei gibt, deren Schwerpunkt ebenfalls zu Γ gehört.

H. Harborth, Braunschweig, BRD

Aufgabe 708. Für natürliche Zahlen k, m sei $\sigma_k(m)$ definiert durch $\sigma_k(m) = \sum_{d|m} d^k$.

Man beweise: Ist (n_i) eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen mit $\limsup_{i \rightarrow \infty} (n_{i+1} - n_i) > k$, so ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n_i)}{n_i!}$$

irrational.

P. Erdős, Budapest

Literaturüberschau

A First Course on Complex Functions. Von G. J. O. JAMESON. 148 Seiten. £1.50. Chapman and Hall, London 1970.

Mit Vergnügen weise ich auf dieses Büchlein hin. Jameson bietet eine moderne Einführung in die Funktionentheorie, die gleich die richtigen Begriffe einführt, möglichst grosse Allgemeinheit aber auf später verschiebt. Auf diese Weise bekommt der Anfänger bald interessante und anwendbare Sätze zu sehen (die Anwendungen werden im Kapitel «Further Topics» gleich vorgeführt), und er wird gespannt auf den «Second Course».

C. BLATTER