

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 29 (1974)
Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Aufgaben

Problem 664 A. In einer Ebene sind n ($n \in \mathbb{N}$) kongruente abgeschlossene Kreisscheiben so gelagert, dass je zwei von ihnen höchstens einen Punkt gemeinsam haben. Vermutlich ist dann die maximal mögliche Anzahl der gemeinsamen Punkte (Berührungspunkte) der Kreisscheiben bei einer derartigen Lagerung $[3n - \sqrt{12n - 3}]$. Man beweise oder widerlege diese Vermutung.

O. Reutter, Ochsenhausen, BRD

Die Maximalzahl von Berührungspunkten sei $B(n)$. Es sind $B(1) = 0$ und $B(2) = 1$ leicht einzusehen, und $B(0) = 0$ sei zusätzlich definiert. Im folgenden kann daher $n \geq 3$ gelten.

Jeder Kreis wird von höchstens sechs anderen berührt. Bei einer maximalen Lagerung berührt jeder Kreis mindestens zwei andere. Werden die Mittelpunkte sich berührender Kreise geradlinig miteinander verbunden, dann ergibt sich eine Zerlegung der Ebene in gleichseitige Polygone. Eine maximale Lagerung muss notwendig derart zusammenhängend sein, dass kein Kreis alleine diesen Zusammenhang herstellt. Es existiert daher ein einfach geschlossenes Randpolygon mit a Eckpunkten ($3 \leq a \leq n$). Gehen von k_j dieser a Eckpunkte jeweils j Strecken aus ($2 \leq j \leq 5$), so gilt

$$a = k_2 + k_3 + k_4 + k_5. \quad (1)$$

Die Innenwinkel an den Eckpunkten vom Typ j sind nicht kleiner als $(j - 1)\pi/3$, so dass für das $3/\pi$ -fache der Winkelsumme des Randpolygons folgt

$$3a - 6 \geq k_2 + 2k_3 + 3k_4 + 4k_5. \quad (2)$$

Bezeichnet f_i die Anzahl der i -Ecke innerhalb des Randpolygons ($i = 3, 4, \dots$), dann gilt nach dem Eulerschen Polyedersatz

$$n + f = n + f_3 + f_4 + \dots = B(n) + 1. \quad (3)$$

Werden die Anzahlen der Seiten aller f Vielecke addiert, so sind die Randseiten einfach und alle anderen doppelt gezählt, das heisst

$$a + 2(B(n) - a) = 3f_3 + 4f_4 + \dots \geq 3f.$$

Hieraus ergibt sich mit f aus (3)

$$n - a \geq B(n) + 3 - 2n. \quad (4)$$

Nun sei angenommen, dass die vermutete Anzahl für alle $t < n$ schon als obere Schranke von $B(t)$ nachgewiesen sei. Werden dann die a Randkreise weggelassen, so bleiben $n - a$ Kreise mit maximal $B(n - a)$ Berührungspunkten übrig. Hieraus folgt

$$B(n) - a - (k_3 + 2k_4 + 3k_5) \leq B(n - a)$$

und mit (1) und (2)

$$B(n) \leq B(n - a) + k_2 + 2k_3 + 3k_4 + 4k_5 \leq B(n - a) + 3a - 6.$$

Für $t = n - a > 0$ ergibt sich mit der Induktionsannahme und mit (4)

$$\begin{aligned} B(n) &\leq 3(n - a) - \sqrt{12(n - a) - 3} + 3a - 6 \\ &\leq 3n - 6 - \sqrt{12B(n) + 33 - 24n}. \end{aligned}$$

Es gilt Gleichheit für $B(n) = 3n \pm \sqrt{12n - 3}$, so dass wegen $B(n) < 3n$

$$B(n) \leq [3n - \sqrt{12n - 3}] \tag{5}$$

gezeigt ist. Für $t = n - a = 0$ folgt unmittelbar aus (4) auch (5).

Dass die vermutete Maximalzahl angenommen wird, ist in den folgenden Lagerungen abzuzählen: An einen Kreis werde ein Kranz von 6, daran ein Kranz von 12, daran ein Kranz von 18 Kreisen, usw., angelagert. Bei vollständigen Kränzen bilden die Randpolygone reguläre Sechsecke. Jeder Kranz werde an einer Ecke begonnen und so aufgefüllt, dass jeder neue Kreis den vorherigen berührt. Mit $s \geq 0, 0 \leq i \leq 5, 0 \leq j \leq s$ werden dann bei $n = 3s^2 + 3s + 1 + (s + 1)i + j$ Kreisen $z = 9s^2 + 3s + (3s + 2)i + 3j - 1$ Berührungspunkte gezählt, mit der Ausnahme $z = 9s^2 + 3s$ im Falle $i = j = 0$. Durch Einsetzen dieser Werte kann

$$B(n) \geq z \geq [3n - \sqrt{12n - 3}] \tag{6}$$

nachgeprüft werden.

Mit (5) und (6) erweist sich die Vermutung somit als richtig.

H. Harborth, Braunschweig, BRD

Aufgabe 685. Die Zahlenfolge $(a_n), n = 1, 2, \dots$, ist dadurch definiert, dass a_1, \dots, a_r ($r \in \mathbb{N}$) beliebig gegebene positive reelle Zahlen sind und dass a_n für alle $n > r$ das Potenzmittel x -ter Ordnung ($x \in \mathbb{R}$) der Zahlen a_{n-1}, \dots, a_{n-r} ist. Man beweise: $\lim a_n$ ($n \rightarrow \infty$) existiert und ist

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{i=1}^r i a_i^x / \binom{r+1}{2} \right]^{1/x}, \quad \text{falls } x \neq 0, \\ &\left[\prod_{i=1}^r a_i \right]^{1/\binom{r+1}{2}}, \quad \text{falls } x = 0. \end{aligned}$$

O. Reutter, Ochsenhausen, BRD

Lösung: (1) Sind $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{R}$ beliebig und ist $b_n = (b_{n-1} + \dots + b_{n-r})/r$ für $n > r$, so existiert $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ und es ist

$$b = \binom{r+1}{2}^{-1} \sum_{i=1}^r i b_i.$$

Sei nämlich $c_n = \text{Min}(b_{n-1}, \dots, b_{n-r}), d_n = \text{Max}(b_{n-1}, \dots, b_{n-r})$ für $n > r$. Ist $c_{r+1} = d_{r+1}$, so ist die Folge $\{b_n\}$ konstant, und (1) ist trivial. Sei also $c_{r+1} < d_{r+1}$; dann ist $r \geq 2$ und $c_n < d_n$ für alle $n > r$; ferner ist $c_{n+1} \geq \text{Min}(c_n, b_{n-1}, \dots, b_{n-r+1}) \geq c_n$ und analog $d_{n+1} \leq d_n$, also $c_n \leq c_{n+1} < d_{n+1} \leq d_n$ für $n > r$. Die Folge $\{d_n - c_n\}_{n > r}$ ist monoton fallend, durch 0 nach unten beschränkt und also konvergent gegen ein $g \geq 0$. Wir behaupten:

$g = 0$. Andernfalls wäre $d_n - c_n \geq f$ für alle $n > r$, wo f eine feste Zahl > 0 ist. Ist $n > r$, so $rb_n \geq (r-1)c_n + d_n \geq rc_n + f$, also

$$b_{n+i} \geq c_n + fr^{i-1} \quad (2)$$

für $i = 0$. Sei (2) bereits für $i \geq 0$ mit $i < r-1$ bewiesen; dann ist

$$rb_{n+i+1} = b_{n+i} + (b_{n+i-1} + \dots + b_{n+i-r+1}) \geq c_n + fr^{i-1} + (r-1)c_n$$

und also ist (2) auch für $i+1$ richtig. Nach (2) ist für $n > r$

$$c_{n+r} \geq \min_{0 \leq i < r} (c_n + fr^{i-1}) = c_n + fr^{-r}.$$

Somit ist für jedes $t \geq 0$ und $n > r$: $c_{n+tr} \geq c_n + tfr^{-r}$. Wähle etwa $n = r+1$; dann sieht man, dass $\{c_{tr+r+1}\}_{t=0,1,\dots}$ nicht nach oben beschränkt ist entgegen $c_n < d_{r+1}$ für alle $n > r$. Somit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n - c_n) = 0$ und wegen $c_n < b_n < d_n$ für alle $n > r$ konvergiert $\{b_n\}$. Aus

$$\sum_{i=1}^r ib_{n-r+i} = \sum_{i=1}^r ib_i \quad (3)$$

für alle $n \geq r$ folgt durch Grenzübergang links in (3) der Rest der Behauptung (1). Zur Lösung der Aufgabe wähle man $b_i = a_i^x$, falls $x \neq 0$; offensichtlich ist $b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^x = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^x$, woraus Existenz und behaupteter Wert von $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ folgt. Ist $x = 0$, so wähle $b_i = \log a_i$ und schliesse analog. P. Bundschuh, Freiburg i.Br., BRD

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH), H. Kappus (Rodersdorf SO) und I. Paasche (München, BRD).

Anmerkung der Redaktion: H. Kappus und I. Paasche bemerken, dass für $x \neq 0$ die a_n^x der linearen Differenzgleichung

$$r f(n) = f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(n-r)$$

genügen. Vgl. in diesem Zusammenhang die Note H. Wimmer, Über eine spezielle Differenzgleichung, *El. Math.* 25 (1970) 85–87.

Aufgabe 686. Es liegen n Münzen M_1, \dots, M_n in einer Reihe. Diese sollen nach folgender Vorschrift gepaart werden: Man nehme eine Münze, überspringe (nach rechts oder nach links) s Münzen und lege sie auf die nächstfolgende; die Existenz einer solchen wird ausdrücklich verlangt. Dann nehme man eine weitere noch ungepaarte Münze und verfähre damit in der gleichen Weise usw. Ein Paar zählt für das Überspringen immer als zwei Münzen.

Für $n = 10$ und $s = 2$ ergibt sich eine vollständige Paarung z.B. wie folgt: M_5 auf M_2 , M_7 auf M_{10} , M_3 auf M_8 , M_9 auf M_6 , M_1 auf M_4 .

Für welche Wertepaare $(n, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist eine vollständige Paarung möglich?

P. Hohler, Olten

Lösung: Ist P die Menge der gesuchten Wertepaare (n, s) , so gilt $P = \{(n, s); n \text{ und } s \text{ gerade, } n \geq 2s + 4\}$. Es ist klar, dass n gerade sein muss. Da der letzte Schritt

immer über eine Anzahl von Paaren führt, muss auch s gerade sein. Es gilt nun

$$(n, s) \in P \rightarrow (n + 2, s) \in P, \quad (1)$$

denn legt man die $(s + 2)$ -te Münze auf die erste, so ist das $(n + 2, s)$ -Problem auf das (n, s) -Problem zurückgeführt, welches nach Annahme lösbar ist. Die Behauptung wird also bewiesen sein, wenn

$$(2s + 2, s) \notin P; \quad (2)$$

$$(2s + 4, s) \in P \quad (3)$$

für gerades s sichergestellt sind.

Zu (2): Wir nehmen an, es sei $(2s + 2, s) \in P$. Vor dem letzten Schritt müsste dann die Anordnung mit u Paaren beginnen, gefolgt von einer Einzelmünze, von $s/2$ Paaren, von einer Einzelmünze und schliesslich von den restlichen v Paaren. Dabei gilt $0 \leq u, 0 \leq v, u + v = s/2$. Nun könnte aber keines dieser Paare in der vorgeschriebenen Weise auseinandergelegt werden, da die Zahl der übersprungenen Münzen niemals s sein könnte. Also gilt (2).

Zu (3): Wir gehen aus von $n/2 = s + 2$ Paaren und legen diese in Einzelmünzen wie folgt auseinander: Es werden stets nacheinander die beiden äussersten Paare abgebaut. Nach $2k$ Schritten ($0 \leq k < (s/2) + 1$) erreicht man so die folgende Anordnung:

$$k \cdot I, \quad \left[\frac{s}{2} - (k - 1) \right] \cdot II, \quad 2k \cdot I, \quad \left[\frac{s}{2} - (k - 1) \right] \cdot II, \quad k \cdot I,$$

wobei $l \cdot I$ bzw. $l \cdot II$ eine Folge von l Einzelmünzen bzw. Paaren bezeichne. Der $(2k + 1)$ -te Schritt besteht darin, eine Münze des rechtsäussersten Paares nach links zu verschieben über $s/2 - (k - 1) - 1$ Paare und $2k$ Einzelmünzen, also über insgesamt s Münzen. Der $(2k + 2)$ -te Schritt baut in analoger Weise das linksäusserste Paar ab. Nach $2k + 2$ Schritten liegt also die folgende Anordnung vor:

$$(k + 1) \cdot I, \quad \left[\frac{s}{2} - k \right] \cdot II, \quad (2k + 2) \cdot I, \quad \left[\frac{s}{2} - k \right] \cdot II, \quad (k + 1) \cdot I.$$

Damit ist induktiv die Möglichkeit des vollständigen Abbaus der Paare in Einzelmünzen begründet und (3) bewiesen.

R. Kamber, Laupersdorf SO

Eine weitere Lösung sandte H. Warncke, Pôrto Alegre, Brasilien.

Aufgabe 687. Es seien in der Ebene drei voneinander verschiedene Geraden g_1, g_2, g_3 und ein Dreieck ABC vorgegeben. Man konstruiere mit Zirkel und Lineal ein zu ABC ähnliches Dreieck $A'B'C'$ derart, dass seine drei Eckpunkte auf den drei gegebenen Geraden liegen.

S. Grabiak, Oberursel, BRD

Lösung: Sind mindestens zwei der Geraden g_1, g_2, g_3 parallel, so gestaltet sich die Lösung besonders einfach. Im folgenden seien die drei Geraden paarweise nicht parallel, und G_i seien die Eckpunkte, γ_i die Innenwinkel des aus g_1, g_2, g_3 gebildeten Dreiecks. Auf dem Fasskreis über BC für γ_1 wählt man G'_1 derart, dass die Gerade G'_1C den Fasskreis über AC für γ_2 schneidet, etwa im Punkt G'_2 . G'_1B und G'_2A schnei-

den sich in G'_3 . Das konstruierte Dreieck $G'_1G'_2G'_3$ ist dem gegebenen Dreieck $G_1G_2G_3$ ähnlich, und das gegebene Dreieck ABC geht unter der betreffenden Ähnlichkeitstransformation in das Dreieck $A'B'C'$ über. Da die Punkte A, B, C auf den Seiten bzw. deren Verlängerungen des Dreiecks $G'_1G'_2G'_3$ liegen, so liegen die Bildpunkte A', B', C' auf den Seiten bzw. deren Verlängerungen des Dreiecks $G_1G_2G_3$, also auf den gegebenen Geraden. Alle Konstruktionen sind mit Zirkel und Lineal durchführbar. Weitere Lösungen erhält man durch Verwendung der Supplementärwinkel der γ_i . Wegen der beliebigen Wahl von G'_1 , unter Beachtung der oben erwähnten Einschränkung, auf dem Faskreis ergibt jede dieser Situationen unendlich viele Lösungen.

P. Nüesch, Lausanne

Aufgabe 688. s, R bzw. r bezeichnen den halben Umfang, den Umkreisradius bzw. den Inkreisradius eines Dreiecks. Man beweise, dass eine Ungleichung von O. Kooi zu

$$\frac{2r(4R+r)^2}{2R-r} \leq 2s^2 \leq \frac{R(4R+r)^2}{2R-r} \quad (1)$$

erweitert werden kann und dass dasselbe für eine andere (wohlbekannte) Ungleichung zu

$$s\sqrt{3} \leq 4R+r \leq s \left(\frac{R+r}{r} \right)^{1/2} \quad (2)$$

möglich ist. Gleichheit genau für das gleichseitige Dreieck.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Lösung (mit Verschärfung): Im folgenden wird die Ungleichungskette

$$3s^2 \leq 2s^2 \cdot \frac{2R-r}{R} \leq (4R+r)^2 \leq s^2 \cdot \frac{R+r}{r} \leq s^2 \cdot \frac{2R-r}{r} \quad (3)$$

bewiesen, deren Terme in dieser Reihenfolge mit T_1, T_2, \dots, T_5 bezeichnet seien. Die Doppelungleichungen (1) und (2) der Aufgabe sind offensichtlich in (3) enthalten, und zwar in den äquivalenten Formen $T_2 \leq T_3 \leq T_5$ bzw. $T_1 \leq T_3 \leq T_4$.

Die Gültigkeit von $T_1 \leq T_2$ und $T_4 \leq T_5$ folgt unmittelbar aus der bekannten Relation $R \geq 2r$, so dass nur noch $T_2 \leq T_3 \leq T_4$ nachzuweisen ist. Hierzu werde das Dreieck betrachtet, dessen Ecken der Umkreismittelpunkt O , der Inkreismitelpunkt I und der Höhenschnittpunkt H des gegebenen Dreiecks sind. Da der Winkel IOH spitz ist, folgt aus dem Kosinussatz

$$2 \cdot \overline{OI} \cdot \overline{OH} \geq \overline{OI}^2 + \overline{OH}^2 - \overline{IH}^2, \quad (4)$$

wobei Gleichheit genau dann besteht, wenn O, I, H kollinear sind, d.h. wenn das gegebene Dreieck gleichschenkelig ist (vgl. Aufgabe 505, *El. Math.* 21 (1966) p. 92).

Nun gilt

$$\left. \begin{aligned} \overline{OI}^2 &= R^2 - 2Rr \\ \overline{OH}^2 &= 9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2s^2 \\ \overline{IH}^2 &= 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - s^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(vgl. etwa J. Steinig, *El. Math.* 18, p. 128 und 129). Trägt man (5) in (4) ein, dann erhält man nach Quadrieren und weiteren algebraischen Umformungen für s^2 die quadratische Ungleichung

$$s^4 - (4 R^2 + 20 Rr - 2 r^2) s^2 + (64 R^3 r + 48 R^2 r^2 + 12 Rr^3 + r^4) \leq 0,$$

aus der sich

$$\boxed{|s^2 - (2 R^2 + 10 Rr - r^2)| \leq 2 \sqrt{R(R - 2r)^3}} \quad (6)$$

ergibt, mit *Gleichheit genau im gleichschenkligen Dreieck*.

Der in (6) auftretende Term $\sqrt{R(R - 2r)}$ lässt sich nun für $R \geq 2r$ durch einen gebrochen-rationalen Term in R, r nach oben abschätzen, nämlich $\sqrt{R(R - 2r)} < R - r - (r^2/2(R - r))$, wie man leicht verifiziert. Damit folgt aus (6) die Doppelungleichung

$$\boxed{16 Rr - 5 r^2 + \frac{r^2 (R - 2r)}{R - r} \leq s^2 \leq 4 R^2 + 4 Rr + 3 r^2 - \frac{r^2 (R - 2r)}{R - r}}, \quad (7)$$

mit *Gleichheit genau im regulären Dreieck*.

Multipliziert man die rechtsseitige Ungleichung in (7) mit $2(2R - r)/R$, dann ergibt sich nach einfacher Umformung die Ungleichung

$$2 s^2 \cdot \frac{2 R - r}{R} \leq (4 R + r)^2 - \frac{r^2 (R + r) (R - 2 r)}{R (R - r)}, \quad (8)$$

womit die behauptete Ungleichung $T_2 \leq T_3$ sogar verschärft ist.

Multipliziert man andererseits die linksseitige Ungleichung in (7) mit $(R + r)/r$, dann erhält man entsprechend die Ungleichung

$$s^2 \cdot \frac{R + r}{r} \geq (4 R + r)^2 + \frac{2 r (2 R - r) (R - 2 r)}{R - r}, \quad (9)$$

womit auch die behauptete Ungleichung $T_3 \leq T_4$ bewiesen und zugleich verschärft ist.

O. Reutter, Ochsenhausen, BRD

Weitere Lösungen sandten L. Bankoff (Los Angeles, California, USA), E. Braune (Linz, Donau, Österreich), P. Bundschuh (Freiburg i. Br., BRD), P. Nüesch (Lausanne) und I. Paasche (München, BRD).

Anmerkung der Redaktion: L. Bankoff erhält folgende Verschärfung der linken Seite von (1):

$$2 r (4 R + r)^2 / (2 R - r) \leq 2 r (4 R + r)^2 / (R + r) \leq 2 r (16 R - 5 r) \leq 2 s^2.$$

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. August 1974**, wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem . . . A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, p. 67), Problem 625B (Band 25, p. 68), Problem 645A (Band 26, p. 46), Problem 672A (Band 27, p. 68).

Aufgabe 709. It is well known (cf. e.g. H. Hadwiger, H. Debrunner, V. Klee, *Combinatorial Geometry in the Plane*, New York 1964, p. 4, Problem 5) that no three distinct points of a square lattice can be the vertices of an equilateral triangle. Show that no four distinct points of an equilateral triangular lattice can be the vertices of a square.
M. S. Klamkin, Dearborn, Michigan, USA

Aufgabe 710. Man beweise, dass an der Stelle $x = 0$ sämtliche Ableitungswerte der Funktion $f: R \rightarrow R$ gemäss $f(x) = 2x/(1 + e^x)$ ($x \in R$) ganzzahlig sind.
R. Weissauer, Ludwigshafen, BRD

Aufgabe 711. Aus n paarweise verschiedenen reellen Zahlen bilde man alle möglichen Summen mit k verschiedenen Summanden ($1 \leq k \leq n$). Wieviele verschiedene Werte nehmen diese Summen mindestens an?
H. Harborth, Braunschweig, BRD

Aufgabe 712. $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$, $C(\gamma, 0)$, $D(\delta, 0)$ désignant les points d'intersection des droites a_1, a_2, a_3, a_4 – formant un quadrilatère complet – avec la droite de Simson du quadrilatère, le rayon R_M du cercle de Miquel (cercle passant par les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles et par le point de Miquel [point commun aux quatre cercles circonscrits] $M(0, \mu)$) est donné par

$$R_M = \frac{R_\alpha R_\beta R_\gamma R_\delta}{4 \mu^3} \quad (R_\alpha = MA, R_\beta = MB, \text{ etc.}).$$

J. Quoniam, St-Etienne, France

Literaturüberschau

Netzplantechnik. Von H. J. ZIMMERMANN. 153 Seiten. DM 7,80. Sammlung Göschen Band 4011. Walter de Gruyter, Berlin 1971.

In diesem kleinen und konzentrierten Werk (153 Seiten, Taschenbuchformat) werden die Belange der Netzplantechnik in 5 Kapiteln, sozusagen von A–Z, behandelt, nämlich:

- Konventionelles Planungsverfahren
- Grundlagen der Netzplantechnik