Aufgaben

Aufgabe 705. Es seien f, g zwei im abgeschlossenen Intervall [0,1] im eigentlichen Sinne Riemann-integrierbare reellwertige Funktionen mit $0 \leq g(x) \leq 1$ für alle $x \in [0,1]$ und $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$. Man beweise die Gültigkeit von

$$\int_0^1 f^2(x)\, dx \geq 4 \left[\int_0^1 g(x)\, f(x)\, dx\right]^2 \tag{*}$$

und finde einen Fall, in welchem in (*) Gleichheit besteht, evtl. aber sogar eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichheit in (*).

H. Hadwiger, Bern

Lösung: Seien $f_+ = (1/2)\,(f + |f|)$ und $f_- = (1/2)\,(f - |f|)$ der positive bzw. negative Anteil von f. Dann gilt

$$\int_0^1 f_+(x)\, dx + \int_0^1 f_-(x)\, dx = 0, \quad f_-(x) \leq g(x)\, f(x) \leq f_+(x) \tag{1}$$

und

$$\left(\int_0^1 g(x)\, f(x)\, dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f_+(x)\, dx\right)^2 = \left(\int_0^1 f_-(x)\, dx\right)^2. \tag{2}$$

Die behauptete Ungleichung folgt, wenn wir

$$\left(\int_0^1 f_+(x)\, dx\right)^2 \leq \frac{1}{4} \int_0^1 f(x)^2\, dx$$

zeigen. Da $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$ ist, haben wir

$$\left(\int_0^1 f_+(x)\, dx\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 f(x)\, dx + \int_0^1 |f(x)|\, dx\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 |f(x)|\, dx\right)^2.$$

Schreiben wir $|f(x)| = 1 \cdot |f(x)|$, so ergibt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\frac{1}{4}\left(\int_0^1 |f(x)|\, dx\right)^2 \leq \frac{1}{4} \int_0^1 f(x)^2\, dx. \tag{3}$$

Wir zeigen nun, dass Gleichheit eintritt, wenn $|f(x)|$ eine nicht-negative Konstante ist und wenn für $g(x)$ gilt

$$\text{(a)} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } f(x) < 0, \\ 1, & \text{falls } f(x) > 0, \end{cases} \quad \text{oder} \quad \text{(b)} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } f(x) > 0, \\ 1, & \text{falls } f(x) < 0. \end{cases}$$

(Für $f(x) \equiv 0$ kann offenbar $g(x)$ beliebig sein.) Legt man den Lebesgueschen Integralbegriff zugrunde, so zeigen die folgenden Überlegungen auch, dass Gleichheit nur dann eintritt, wenn f und g bis auf eine Menge vom Mass Null so bestimmt sind.

Zunächst ist in (3) bekanntlich genau dann Gleichheit, wenn $|f(x)|$ bis auf eine Menge vom Mass Null konstant ist. In (2) tritt Gleichheit ein, wenn

$$\int_0^1 g(x)\, f(x)\, dx = \int_0^1 f_+(x)\, dx \quad \text{oder} \quad \int_0^1 g(x)\, f(x)\, dx = \int_0^1 f_-(x)\, dx\,.$$

Ist g durch (a) bestimmt, so ist die linke Gleichung richtig, und umgekehrt folgt daraus wegen (1), dass g bis auf eine Menge vom Mass Null durch (a) definiert ist. Entsprechend schliesst man im anderen Fall. E. Heil, Darmstadt, BRD

Weitere Lösungen sandten H. Flanders (Tel Aviv, Israel), W. Gruner (Zollikerberg ZH), H. Kappus (Rodersdorf SO; Teillösung), M. S. Klamkin (Ann Arbor, Michigan, USA), D. Laugwitz (Darmstadt, BRD), O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), P. Mihailescu (Zürich), I. Paasche (München, BRD) und O. Reutter (Ochsenhausen, BRD).

Anmerkung der Redaktion: Die obige Aussage über die Gleichheit in (3) basiert auf der Tatsache, dass bei einer positiv semidefiniten symmetrischen Bilinearform (im komplexen Fall: hermiteschen Form) das Gleichheitszeichen in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung genau dann gilt, wenn die beiden betrachteten Elemente linear abhängig modulo dem Nullraum der zugeordneten Halbnorm sind.

Aufgabe 706. Es bezeichnen w_a, w_b, w_c die Längen der Winkelhalbierenden und a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks. Man beweise, dass

$$4\,(w_b\, w_c + w_c\, w_a + w_a\, w_b) \le 3\,(b\,c + c\,a + a\,b)$$

mit Gleichheit genau im gleichseitigen Dreieck. A. Bager, Hjørring, Dänemark

Lösung (mit Verschärfung): Es sei ABC ein Dreieck und A_1, B_1, C_1 die Fusspunkte der Winkelhalbierenden. Aus $\overline{AB_1}/\overline{B_1C} = c/a, \ldots$ folgt:

$$\overline{AB_1} = \frac{b\,c}{a+c}\,,\quad \overline{AC_1} = \frac{b\,c}{a+b}\,,\quad \overline{BC_1} = \frac{c\,a}{a+b}\,,\quad \overline{CB_1} = \frac{a\,b}{a+c}\,,\ \ldots$$

Die Parallelen durch C_1 und B_1 zu BC schneiden AC und AB in C_2 bzw. B_2. Es ergibt sich leicht:

$$\overline{B_1B_2} = \frac{a\,c}{a+c} \quad \text{und} \quad \overline{C_1C_2} = \frac{a\,b}{a+b}\,.$$

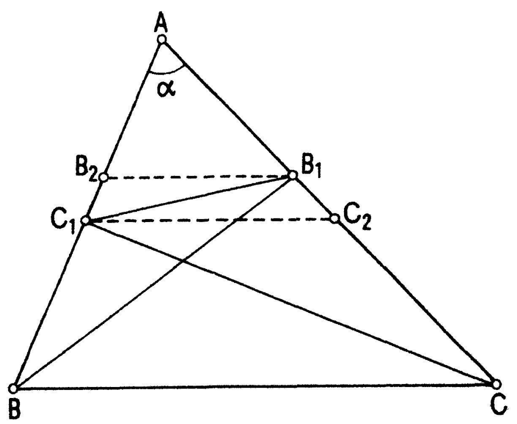

Fig. 1

Zuerst soll folgende Ungleichung bewiesen werden:

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2}\right) \geq \overline{B_1C_1}} \tag{1}$$

oder mit

$$\overline{B_1C_1}^2 = \left(\frac{b\,c}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b\,c}{a+c}\right)^2 - \frac{2\,b^2\,c^2\cos\alpha}{(a+b)\,(a+c)}$$

$$= \left(\frac{b\,c}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b\,c}{a+c}\right)^2 - \frac{b\,c\,(b^2+c^2-a^2)}{(a+b)\,(a+c)}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}\left(\frac{a\,c}{a+c} + \frac{a\,b}{a+b}\right)^2 \geq \left(\frac{b\,c}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b\,c}{a+c}\right)^2 - \frac{b\,c\,(b^2+c^2-a^2)}{(a+b)\,(a+c)}}\,. \tag{1'}$$

Die Ungleichung (1′) geht, nach einigen algebraischen Umformungen, in die folgende, evidente Ungleichung über:

$$a\,(b-c)^2\,[a^3 + 4\,b\,c\,(a+b+c)] \geq 0\,.$$

Damit ist (1′) – d.h. auch (1) – bewiesen.

In einem Viereck $ABCD$ mit $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$, $\overline{AC} = e$ und $\overline{BD} = f$ gilt der Satz von Ptolemäus:

$$\boxed{e\,f \leq a\,c + b\,d} \tag{2}$$

mit Gleichheit für das Sehnenviereck.

Die Ungleichung (2), auf das Viereck BCB_1C_1 (Fig. 1) angewandt, ergibt:

$$\boxed{w_b\,w_c \leq \overline{BC_1}\cdot\overline{CB_1} + \overline{BC}\cdot\overline{B_1C_1}}\,. \tag{3}$$

Mit (1) gilt umso mehr:

$$\boxed{w_b\,w_c \leq \overline{BC_1}\cdot\overline{CB_1} + \overline{BC}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2}\right)} \tag{4}$$

oder

$$\boxed{w_b\,w_c \leq \frac{a\,b}{a+c}\cdot\frac{c\,a}{a+b} + \frac{1}{2}\,a\left(\frac{a\,c}{a+c} + \frac{a\,b}{a+b}\right)} \tag{4'}$$

Aus (4′) erhält man mit Hilfe der Identität: $\Sigma\left(a^2\,(b+c)\,[c\,(a+b) + b\,(a+c)]\right) = (\Sigma\,a\,b)\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a)$:

$$\sum w_b w_c \leq \sum\left[\frac{a^2 b\,c}{(a+b)\,(a+c)} + \frac{a^2}{2}\left(\frac{c}{a+c} + \frac{b}{a+b}\right)\right] = \frac{1}{(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}$$

$$\times\left\{2\,a\,b\,c\,\left(\sum a\,b\right) + \frac{1}{2}\sum a^2\,(b+c)\,[c\,(a+b) + b\,(c+a)]\right\}$$

$$= \left(\sum a\,b\right)\left[\frac{1}{2} + \frac{2\,a\,b\,c}{(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}\right]. \tag{5}$$

Weiter ist $a + b \geq 2\sqrt{a\,b}$; $b + c \geq 2\sqrt{b\,c}$; $c + a \geq 2\sqrt{c\,a}$, d.h.:

$$\boxed{(a + b)\,(b + c)\,(c + a) \geq 8\,a\,b\,c} \tag{6}$$

Mit (6) erhält man aus (5):

$$\sum w_b\,w_c \leq \left(\sum a\,b\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}\left(\sum a\,b\right).$$

Die Ungleichung der Aufgabe 706 lässt sich also wie folgt verschärfen:

$$\boxed{4\sum w_b\,w_c \leq \left(\sum a\,b\right)\left[2 + \frac{8\,a\,b\,c}{(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}\right] \leq 3\left(\sum a\,b\right).} \tag{7}$$

Die Gleichheitszeichen in (7) stehen genau im Falle $a = b = c$, wie sich aus der Betrachtung der Ungleichungen (1), (5) und (6) leicht ergibt.

G. Bercea, München, BRD

Weitere Lösungen sandten P. Addor (Bern), L. Bankoff (Los Angeles, California, USA), H. Brändli (Zürich), P. Bundschuh (Köln, BRD), K. Inkeri (Turku, Finnland), M. S. Klamkin (Ann Arbor, Michigan, USA), I. Paasche (München, BRD) und M. Vowe (Therwil BL).

Anmerkung: G. Bercea weist darauf hin, dass sich aus der Ptolemäischen Ungleichung (2) auf sehr einfache Weise viele andere Ungleichungen herleiten lassen, z. B.

$$2\,|m_b - m_c| \geq |b - c|\,,\; 2\,|m_c - m_a| \geq |c - a|,\; 2\,|m_a - m_b| \geq |a - b|\,, \tag{8}$$

$$3\,(a\,m_a + b\,m_b + c\,m_c) \leq (m_a + m_b + m_c)\,(a + b + c)\,. \tag{9}$$

Aufgabe 707. In der affinen Ebene sei das durch zwei linear unabhängige Vektoren a, b erzeugte Punktgitter

$$\Gamma := \{r\,a + s\,b;\quad r, s \quad \text{ganzrationale Zahlen}\}$$

gegeben. Man bestimme die kleinste natürliche Zahl G so, dass es unter G Punkten von Γ stets deren drei gibt, deren Schwerpunkt ebenfalls zu Γ gehört.

H. Harborth, Braunschweig, BRD

Lösung: Es ist $G = 9$. – Sind $P_k = (r_k, s_k)$ Gitterpunkte, so ist der Schwerpunkt genau dann Gitterpunkt, wenn gilt

$$\sum_{k=1}^{3} r_k \equiv \sum_{k=1}^{3} s_k \equiv 0 \text{ (modulo 3)}. \tag{S}$$

Man braucht nur modulo 3 zu rechnen, und es genügt, die Menge M der neun Punkte mit den Koordinatenwerten $r, s = 0, \pm 1$ zu betrachten. Erscheinen Punkte von M nach Reduktion modulo 3 mehrfach belegt, so kann man durch Addition von geeigneten Vielfachen von 3 zu den Koordinaten «auseinanderziehen». Die Eigenschaft des Schwerpunkts, Gitterpunkt zu sein, wird davon nicht berührt.

Beispiel und Beweis für $G > 8$: Man belege die vier Punkte (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) jeweils genau zweifach; (S) ist für kein Tripel erfüllbar. Durch Addition von 3 zu den ersten Koordinaten erhält man vier weitere Punkte, also eine Figur aus acht Gitterpunkten, von denen keine drei (S) erfüllen.

Beweis von $G = 9$: Hier sind die neun Punkte von M Plätze für genau neun voneinander verschiedene Objekte. Ist wenigstens ein Platz mindestens dreifach besetzt, so lässt sich (S) erfüllen; das tritt sicher ein, wenn genau 1, 2, 3 oder 4 Plätze besetzt sind. Interessant ist der Fall, dass genau 5 Plätze besetzt sind; dieses Quintupel bezeichnen wir mit Q. Man deute M als Modell einer Ebene mit 9 Punkten und 12 Geraden; die letzteren sind die 6 Achsenparallelen und die 6 «Diagonalen» (z.B. liegen (−1,0), (0,1), (1, −1) auf einer «Diagonalen»). Jede Gerade inzidiert mit 3 Punkten, jeder Punkt mit 4 Geraden. (S) tritt ein, wenn die drei Punkte in M verschieden sind und auf einer Geraden liegen.

Wir nehmen nun an, jede Gerade träfe höchstens zwei Punkte von Q und führen das zum Widerspruch. Die Punkte von Q erzeugen, da ja keine drei kollinear sind, genau $\binom{5}{2} = 10$ Verbindungsgeraden. Die beiden übrigen Geraden enthalten je höchstens einen Punkt von Q; auf jeder der beiden Geraden liegt also ein von ihrem Schnittpunkt verschiedener Punkt, der nicht zu Q gehört. Die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte kann also höchstens einen Punkt von Q enthalten, muss andererseits aber zu den 10 Verbindungsgeraden gehören. Das ist ein Widerspruch. Bei mehr als fünf belegten Punkten erhielte man bei entsprechender Annahme mindestens $\binom{6}{2} = 15$ verschiedene Verbindungsgeraden, während nur 12 zur Verfügung stehen.

D. Laugwitz, Darmstadt, BRD

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH), H. Kappus (Rodersdorf SO), I. Paasche (München, BRD) und E. Teuffel (Korntal, BRD).

Anmerkung: D. Laugwitz weist auf die folgenden Verallgemeinerungen hin:

1. $G_n(3)$ sei die entsprechende Minimalzahl für 3 Punkte im n-dimensionalen affinen Raum, also $G_2(3) = G = 9$. Wieder ist bei den Gitterkoordinaten modulo 3 zu rechnen, und die Verallgemeinerung des Beispiels (doppelte Belegung der 2^n Ecken des «nichtnegativen Einheitswürfels» und Addition von 3 zur ersten Koordinate) gibt $G_2(3) \geqq 2 \cdot 2^n + 1 = 2^{n+1} + 1$.

2. $G_n\,(n+1)$ sei die entsprechende Zahl für $n + 1$ Punkte im n-dimensionalen Raum; hier ist also modulo $n + 1$ zu rechnen; belegt man die Ecken des «nichtnegativen Einheitswürfels» genau n-fach, so ist für die Koordinaten $x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ von Punkten $P^{(k)}$ die Schwerpunktsbedingung

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_j^{(k)} \equiv 0 \pmod{n+1} \qquad \text{für alle} \quad j = 1, \ldots, n$$

bei keinem $(n + 1)$-tupel erfüllbar. Trennt man durch Addition von $(n + 1)$ zur ersten, zweiten, ..., $(n - 1)$-ten Koordinate, so folgt

$$G_n\,(n+1) \geqq n \cdot 2^n + 1\,.$$

3. Schliesslich bekommt man entsprechend $G_n(m) \geqq (m-1) \cdot 2^n + 1$ für $3 \leqq m \leqq n + 1$.

Aufgabe 708. Für natürliche Zahlen k, m sei $\sigma_k(m)$ definiert durch $\sigma_k(m) = \sum_{d|m} d^k$. Man beweise: Ist (n_i) eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen mit $\lim_{i\to\infty} \sup\, (n_{i+1} - n_i) > k$, so ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n_i)}{n_i!}$$

irrational. P. Erdös, Budapest

Lösung: Es ist

$$\sigma_k(m) \leq m^k \sum_{l=1}^{m} l^{-k} \leq m^k (1 + \log m)\,. \tag{1}$$

Wir nehmen an, dass die Summe rational sei, sagen wir p/q. Es gibt eine Folge von Indizes j, wofür

$$n_j > q \quad \text{und} \quad n_{j+1} \geq n_j + k + 1\,.$$

Aus der Annahme folgt, dass für diese j gilt

$$S_j := n_j! \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n_i)}{n_i!} \geq 1\,. \tag{2}$$

Schreiben wir m statt n_j, so ist nach (1)

$$S_j \leq m! \sum_{n=m+k+1}^{\infty} \frac{n^k (1 + \log n)}{n!} = m! \sum_{n=m+k+1}^{\infty} a_n\,.$$

Aus

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

und

$$\lim_{m\to\infty} \sup m!\, a_{m+k+1} = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{n^k (1 + \log n)}{n(n-1)\ldots(n-k)} = 0$$

folgt $\lim_{j\to\infty} S_j = 0$ (für die Teilfolge), ein Widerspruch mit (2).

O. P. Lossers, Eindhoven, Niederlande

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD) und P. Mihailescu (Zürich).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis **10. Juni 1975.** Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Aufgabe 729. If A, B, C denote the angles of an arbitrary triangle, then it is known (cf., e.g., O. Bottema et al., Geometric Inequalities, Groningen 1968, p. 120) that the three triples ($\sin A$, $\sin B$, $\sin C$), ($\cos A/2$, $\cos B/2$, $\cos C/2$), ($\cos^2 A/2$, $\cos^2 B/2$, $\cos^2 C/2$) are sides of three triangles. Give a generalization which includes the latter three cases as special cases.

M. S. Klamkin, Dearborn, Michigan, USA

Aufgabe 730. Man beweise: Sind a, b, c, d, e, f reelle Zahlen mit den Eigenschaften

$$a c + b d = e f \,, \tag{1}$$

$$(a d + b c) f = (a b + c d) e \,, \tag{2}$$

so gilt

$$[a b e (c + d + e) + c d e (a + b + e)] (b + c + f) (a + d + f)$$
$$= [b c f (a + d + f) + a d f (b + c + f)] (a + b + e) (c + d + e) \,. \tag{3}$$

Für positive a, b, c, d, e, f interpretiere man (1), (2), (3) geometrisch.

G. Bercea, München, BRD

Aufgabe 731. Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\zeta(n+1)}{n+2} = 1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi) \,,$$

where γ is Euler's constant defined by $\gamma = \lim_{n\to\infty} (1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \ln n)$ and ζ is the Riemann zeta function defined by $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ for $s > 1$.

D. Suryanarayana, Waltair, India

Aufgabe 732. Es sei f eine der zahlentheoretischen Funktionen φ, σ, τ. Man zeige, dass es a) für jedes positive reelle c unendlich viele natürliche Zahlen n derart gibt, dass gilt:

$$(1 + c)^{n-i} f(n - i) < (1 + c)^n f(n) < (1 + c)^{n+j} f(n + j) \quad \text{für alle} \quad i, j \in N \,;\, i < n,$$

b) für jedes natürliche k nur endlich viele natürliche Zahlen n derart gibt, dass gilt:

$$(n - i)^k f(n - i) < n^k f(n) < (n + j)^k f(n + j) \quad \text{für alle} \quad i, j \in \mathrm{N} \,;\, i < n \,.$$

P. Erdös, Budapest

Literaturüberschau

The Computer from Pascal to von Neumann. Von Herman H. Goldstine. X + 378 Seiten, 14 Abbildungen. $12.50. Princeton University Press, 1972.

Das Buch ist in drei Teile mit den Titeln «The Historical Background up to World War II», «Wartime Developments: ENIAC und EDVAC», «Post-World War II: The von Neumann Machine and The Institute of Advanced Study» und einen Anhang («World-Wide Developments») gegliedert. Da der Verfasser, Mathematiker und seinerzeit Mitglied einer militärischen Forschungs- und Beschaffungsbehörde, persönlich sehr intensiv am Projekt – der ursprüngliche Auftrag lautete auf Konstruktion eines zweckmässigen Hilfsmittels für ballistische Berechnungen – beteiligt war, erfährt der interessierte Leser eine Fülle von Einzelheiten über die Gedankengänge während der Projektierung, über die Probleme bei der Realisierung und über die beteiligten Persönlichkeiten wie etwa Aiken, Eckert, Mauchly und von Neumann. Der erste Teil ist verhältnismässig knapp gefasst, wobei immerhin auch von Analogrechengeräten die Rede ist; die andern beiden Teile sind sehr ausführlich gestaltet. Dass vor allem die Entwicklungen in den USA behandelt werden, ist nicht nur begreiflich, sondern ja auch objektiv begründet. Über das Geschehen in andern Ländern wird im Anhang berichtet, wobei noch einiges nicht allgemein Bekanntes enthalten sein dürfte.

Mir ist beim Lesen des Buches einmal mehr bewusst geworden, diesmal aber besonders eindrücklich, dass wir leider auch auf dem Gebiete der Computer den gewaltigen technischen Fortschritt primär militärischen Bedürfnissen und Finanzquellen «verdanken». W. Prokop