Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 31 (1976)
Heft: 3

Artikel: Bestimmung von Untergruppen durch Permutationsdarstellungen
Autor: Bauhoff, Eugen Peter
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31394

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Band 31 Heft 3 Seiten 49–80 10. Mai 1976

Bestimmung von Untergruppen durch Permutationsdarstellungen

1. Einleitung

Bekanntlich kann es in einer Gruppe $\mathfrak{G} = (\mathbf{G}, \cdot)$ mehrere Untergruppen $\mathfrak{H} = (\mathbf{H}, \cdot)$ geben, zu denen dieselbe disjunkte Restklassenzerlegung

$$\mathbf{G} = \bigcup_{i=0}^{r} x_i \mathbf{H}$$

gehört.

Ist beispielsweise $\mathfrak{G}$ die von $t_1: (x, y) \to (x + a, y)$ und $t_2: (x, y) \to (x, y + b)$ erzeugte Gruppe von Translationen der x-y-Ebene, so gehört zu der von t_1^2 und t_2 erzeugten Untergruppe $\mathfrak{H}_1 = (\mathbf{H}_1, \cdot)$ die Restklassenzerlegung $\mathbf{G} = \mathbf{H}_1 \cup t_1\mathbf{H}_1$ und zu der von t_1^2 und t_1t_2 erzeugten Untergruppe $\mathfrak{H}_2 = (\mathbf{H}_2, \cdot)$ die Zerlegung $G = \mathbf{H}_2 \cup t_1\mathbf{H}_2$. Die Restklassen von $\mathbf{G}$ nach $\mathbf{H}_1$ bzw. $\mathbf{H}_2$ werden also in beiden Fällen durch das neutrale Element von $\mathfrak{G}$ und durch t_1 repräsentiert.

Es erhebt sich daher die Frage, wie die Untergruppen $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, die zu einer vorgegebenen Restklassenzerlegung gehören, charakterisiert werden können. Antwort hierauf gibt Satz 1, der umgekehrt auch zur Konstruktion von Untergruppen dienen kann. Es handelt sich dabei um die Verwendung von Eigenschaften einer gewissen Permutationsdarstellung von $\mathfrak{G}$.

Bemerkung: Satz 1 verallgemeinert ein von Wohlfahrt [4], Millington [1] und neuerdings von Newman [2] verwendetes Prinzip zur Konstruktion von Untergruppen in der rationalen Modulgruppe.

2.

Im folgenden bezeichnet $\mathfrak{S}_m$ die Permutationsgruppe der Zahlen $0, 1, \ldots, m-1$.

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ beliebige Elemente der Gruppe $\mathfrak{G} = (\mathbf{G}, \cdot)$, x_0 sei gleich dem neutralen Element e von $\mathfrak{G}$.

Wir wollen einen Überblick über die Gesamtheit der Untergruppen $\mathfrak{H} = (\mathbf{H}, \cdot)$ von $\mathfrak{G}$ mit der zugehörigen disjunkten Restklassenzerlegung

$$\mathbf{G} = \bigcup_{i=0}^{m-1} x_i \mathbf{H}$$

gewinnen.

Ist $\mathfrak{H}$ eine solche Untergruppe, so werden die Restklassen $x_0\,\mathbf{H}, x_1\,\mathbf{H}, \ldots, x_{m-1}\,\mathbf{H}$ durch Linksmultiplikation mit einem beliebigen Element a der Gruppe $\mathfrak{G}$ permutiert. Jedem Element a von $\mathfrak{G}$ entspricht also eine Permutation $\varphi(a) \in \mathfrak{S}_m$, die durch die Bedingungen

$$a x_i\,\mathbf{H} = x_{\varphi(a)(i)}\,\mathbf{H} \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, m-1$$

festgelegt ist.

Wir erhalten somit einen Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{S}_m$. Für diesen gilt insbesondere:

$$\varphi(x_i)\,(0) = i \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, m-1\,.$$

Dass umgekehrt zu jedem Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{S}_m$ mit dieser Eigenschaft eine Untergruppe $\mathfrak{H}_\varphi = (\mathbf{H}_\varphi, \cdot)$ der angegebenen Art gehört, besagt der folgende

Satz 1: Die Untergruppen $\mathfrak{H} = (\mathbf{H}, \cdot)$ von $\mathfrak{G} = (\mathbf{G}, \cdot)$ mit der zugehörigen disjunkten Restklassenzerlegung

$$\mathbf{G} = \bigcup_{i=0}^{m-1} x_i\,\mathbf{H}$$

entsprechen umkehrbar eindeutig den Homomorphismen $\varphi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{S}_m$, die die Bedingungen $\varphi(x_i)\,(0) = i$ für $i = 0, 1, \ldots, m-1$ erfüllen. Für die einem solchen Homomorphismus zugeordnete Untergruppe $\mathfrak{H}_\varphi = (\mathbf{H}_\varphi, \cdot)$ gilt:

$$\mathbf{H}_\varphi = \{g \in \mathbf{G} \mid \varphi(g)\,(0) = 0\}\,.$$

Korollar: Es gilt:

$$\text{Kern}\,(\varphi) = \bigcap_{i=0}^{m-1} x_i\,\mathbf{H}_\varphi\,x_i^{-1}\,.$$

Beweis: Sei $\varphi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{S}_m$ ein Homomorphismus, der die im Satz angegebenen Eigenschaften hat. Wir zeigen, dass dann für die Gruppe $\mathfrak{H}_\varphi = (\mathbf{H}_\varphi, \cdot)$ mit

$$\mathbf{H}_\varphi = \mathbf{H} = \{g \in \mathbf{G} \mid \varphi(g)\,(0) = 0\}$$

die disjunkte Restklassenzerlegung

$$\mathbf{G} = \bigcup_{i=0}^{m-1} x_i\,\mathbf{H}$$

gilt.

Hierzu sei $\mathbf{A}$ ein beliebiges Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}' = (\mathbf{H}', \cdot)$ die von allen Elementen

$$x_{\varphi(a)(i)}^{-1}\,a x_i \quad (a \in A, i = 0, 1, \ldots, m-1)$$

erzeugte Gruppe.

Man sieht sofort, dass $\mathbf{G}$ in $\bigcup_{i=0}^{m-1} x_i\,\mathbf{H}'$ enthalten ist. Denn für alle $a \in \mathbf{A}$ ist $a x_i\,\mathbf{H}' = x_{\varphi(a)(i)}\,\mathbf{H}'$.

Nach Voraussetzung gilt ferner für $i = 0, 1, \ldots, m-1$, dass $\varphi(x_i)\,(0) = i$ ist, also ist $\varphi(a x_i)\,(0) = \varphi(a)\,(i)$ und somit $\varphi(x^{-1}_{\varphi(a)(i)}\, a x_i)\,(0) = 0$ $(a \in \mathbf{A})$. Daher gilt $\varphi(g)\,(0) = 0$ für alle $g \in H'$.

Ist $g \in x_j\,\mathbf{H}'$, so ist $\varphi(g)\,(0) = \varphi(x_j)\,(0) = j$. Aus $\varphi(g)\,(0) = 0$ folgt also, dass $g \in \mathbf{H}'$ ist. Somit ist $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$.

Hieraus folgen nun sofort die Disjunktheit der angegebenen Restklassenzerlegung und das Korollar:

Ist nämlich $x_i^{-1}\, x_j \in \mathbf{H}$, so folgt: $\varphi(x_i^{-1}\, x_j)\,(0) = 0$, also $\varphi(x_i)\,(0) = \varphi(x_j)\,(0)$, d.h. $i = j$. Die angegebene Restklassenzerlegung ist also disjunkt.

Weiter: Ist $g \in \operatorname{Kern}(\varphi)$, also $\varphi(g)\,(i) = i$ für $i = 0, 1, \ldots, m-1$, so folgt wegen $i = \varphi(x_i)\,(0)$:

$$\varphi(g)\,\varphi(x_i)\,(0) = \varphi(x_i)\,(0), \quad \text{also} \quad \varphi\,(x_i^{-1}\, g\, x_i)\,(0) = 0, \quad \text{also} \quad x_i^{-1}\, g\, x_i \in \mathbf{H} \quad \text{für}$$

$i = 0, 1, \ldots, m-1$. Somit ist $\operatorname{Kern}(\varphi) \subset \bigcap\limits_{i=0}^{m-1} x_i \mathbf{H}\, x_i^{-1}$.

Ist umgekehrt $g \in x_i\,\mathbf{H}\,x_i^{-1}$, also $g = x_i h\, x_i^{-1}$ mit $h \in \mathbf{H}$, so ist

$$\varphi(g)\,(i) = \varphi(x_i)\,\varphi(h)\,\varphi(x_i^{-1})\,(i) = \varphi(x_i)\,\varphi(h)\,(0) = \varphi(x_i)\,(0) = i\,.$$

Daher ist $\bigcap\limits_{i=0}^{m-1} x_i \mathbf{H}\, x_i^{-1} = \operatorname{Kern}(\varphi)$.

Im Beweis von Satz 1 hat sich zusätzlich ergeben:

Bemerkung: Ist $\mathbf{A}$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$, so ist

$$\{x^{-1}_{\varphi(a)(i)}\; a\; x_i\}\; \begin{array}{l} a \in \mathbf{A} \\ i = 0, 1, \ldots, m-1 \end{array}$$

ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{H}$. Seine Bestimmung ist als Reidemeisterverfahren in die Literatur eingegangen. (Siehe etwa [3]).

3. Beispiel

Es sei $\mathfrak{G} = (\mathbf{G}, \cdot)$ die Gruppe von Translationen der x-y-Ebene, die erzeugt wird von $t_1 : (x, y) \to (x + a, y)$ und $t_2 : (x, y) \to (x, y + b)$. $\mathfrak{G}$ ist offenbar eine freie abelsche Gruppe von zwei Erzeugenden.

Wir bestimmen alle Untergruppen $\mathfrak{H} = (\mathbf{H}, \cdot)$ von $\mathfrak{G}$, zu denen die disjunkte Restklassenzerlegung $\mathbf{G} = \bigcap\limits_{i=0}^{m-1} t_1^i\, \mathbf{H}$ gehört.

In der Bezeichnung von Satz 1 ist also $x_i = t_1^i$. Nach diesem Satz entsprechen die betrachteten Untergruppen umkehrbar eindeutig den Homomorphismen $\varphi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{S}_m$ mit der Eigenschaft $\varphi(t_1^i)\,(0) = i$, d.h. $\big(\varphi(t_1)\big)^i\,(0) = i$.

Jeder Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{S}_m$ ist durch die Permutationen $\varphi(t_1) = \tau_1$ und $\varphi(t_2) = \tau_2$ bereits eindeutig bestimmt. Da $\mathfrak{G}$ freie abelsche Gruppe ist, existiert umgekehrt zu je zwei vertauschbaren Permutationen $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{S}_m$ genau ein Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{S}_m$ mit $\varphi(t_1) = \tau_1$, $\varphi(t_2) = \tau_2$. Wir können daher in diesem Fall den Satz wie folgt formulieren:

Die Untergruppen $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, zu denen die disjunkte Restklassenzerlegung $\mathbf{G} = \bigcup_{i=0}^{m-1} t_1^i \mathbf{H}$ gehört, entsprechen umkehrbar eindeutig den Paaren (τ_1, τ_2) von Permutationen aus $\mathfrak{S}_m$ mit der Eigenschaft $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$ und $\tau_1^i(0) = i$ für $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Welche Permutationen kommen für τ_1 und τ_2 in Frage?

Wegen $\tau_1^i(0) = i$ für $i = 0, 1, \ldots, m - 1$ ist τ_1 eindeutig bestimmt, und zwar ist $\tau_1 = (0, 1, \ldots, m - 1)$.

Es sei $\tau_2(0) = k$. Dann ergibt sich wegen der Vertauschbarkeit von τ_1 und τ_2 notwendig:

$$\tau_2(i) = \tau_2\tau_1^i(0) = \tau_1^i\tau_2(0) = \tau_1^i(k) = \tau_1^i\tau_1^k(0) = \tau_1^k\tau_1^i(0) = \tau_1^k(i) \ .$$

Also ist $\tau_2 = \tau_1^k$. τ_2 ist daher durch die Zahl k bereits eindeutig bestimmt. Es ist klar, dass umgekehrt k beliebig vorgeschrieben werden kann.

Die Paare (τ_1, τ_2) von Permutationen aus $\mathfrak{S}_m$ mit den Eigenschaften $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$ und $\tau_1^i(0) = i$ für $i = 0, 1, \ldots, m - 1$ entsprechen also umkehrbar eindeutig den Zahlen k mit $0 \leq k \leq m - 1$.

Zusammengefasst erhalten wir also folgendes Ergebnis:

Satz 2: Es gibt genau m Untergruppen $\mathfrak{H}_k = (\mathbf{H}_k, \cdot)$ von $\mathfrak{G}$, zu denen die disjunkte Restklassenzerlegung $\mathbf{G} = \bigcup_{i=0}^{m-1} t_1^i \mathbf{H}_k$ gehört $(k = 1, \ldots, m)$.

Ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{H}_k$ kann leicht mit Hilfe des Korollars angegeben werden:

$\mathfrak{H}_k$ wird erzeugt von den Elementen $t_1^{-\tau_1(i)}\, t_1\, t_1^i$ und $t_1^{-\tau_2(i)}\, t_2\, t_1^i$ $(i = 0, 1, \ldots, m - 1)$.

Wegen $\tau_1(i) = i + 1$ für $0 \leq i \leq m - 2$, $\tau_1\,(m - 1) = 0$ und $\tau_2(i) \equiv i + k \bmod m$ folgt:

Korollar: $\mathfrak{H}_k$ wird erzeugt von t_1^m und $t_1^{-k} t_2$.

Eugen Peter Bauhoff,
Universität Mannheim, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Millington, M.H., *Subgroups of the Classical Modular Group*, J. London Math. Soc. *1*, 351–357 (1969).

[2] Newman, M., *Formulas and Multiplicative Relationships for the Parameters of Subgroups of the Modular Group*. Math. Ann. *212*, 173–182 (1974).

[3] Reidemeister, K., *Knoten und Gruppen*, Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg *5*, 7–23 (1927).

[4] Wohlfahrt, K., *On some Representations of Sl (2, Z)*, Ill. J. Math. *15*, 144–149 (1971).

Zwei Abzählprobleme über Sequenzen mit Zeichen aus einem gegebenen Alphabet

1. Problemstellung

Es sei ein Alphabet von m Zeichen (Buchstaben) $A_1, A_2, \ldots, A_m$ gegeben. Bildet man nach geeigneten Vorschriften aus diesem Alphabet n-stellige Sequenzen (Wörter