

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 31 (1976)
Heft: 3

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Kleine Mitteilungen

Volume of an N -Simplex by Multiple Integration

For $N = 1, 2, \dots$, let Δ_N be the N -simplex bounded by the coordinate hyperplanes $x_1 = 0, \dots, x_N = 0$, and the hyperplane

$$\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_N}{a_N} = 1. \quad (1)$$

where a_1, \dots, a_N are positive numbers. Thus, Δ_N intersects the coordinate axes at the points $x_i = a_i, i = 1, \dots, N$. In this note, we prove using multiple integrals that the volume of Δ_N is

$$V(\Delta_N) = \frac{\prod_{i=1}^N a_i}{N!}. \quad (2)$$

It is felt that the proof may be useful pedagogically to students in advanced calculus or in beginning analysis who are seeing integration in R^N for the first time. It was motivated by a problem in Ref. [1]; p. 560, exer. 1.

We denote by $V_N(a_1, \dots, a_N)$ the volume of the simplex Δ_N with sides a_1, \dots, a_N . Our proof is by induction on N . Since Δ_1 is a line of length a_1 and Δ_2 a right triangle with sides a_1 and a_2 , formula (2) holds for $N = 1, 2$. We now assume that we have proved formula (2) for $N = 1, 2, \dots, k$ and consider $N = k + 1$. But for $k \geq 2$

$$V_{k+1}(a_1, \dots, a_{k+1}) = \int_0^{a_1} \int_0^{a_2(1-x_1/a_1)} \int_0^{a_3(1-x_1/a_1-x_2/a_2)} \dots \int_0^{a_{k+1}(1-x_1/a_1-x_2/a_2-\dots-x_k/a_k)} dx_{k+1} \dots dx_3 dx_2 dx_1. \quad (3)$$

The upper limit on the integration with respect to each x_i is obtained by solving equation (1) (with $N = k + 1$) for x_i in terms of the other variables and setting $x_j = 0$ for $i < j \leq k + 1$. We make the change of variables $y_1 = x_1/a_1, y_2 = x_2/a_2, \dots, y_{k+1} = x_{k+1}/a_{k+1}$, in the multiple integral in equation (3), obtaining

$$\begin{aligned} V_{k+1}(a_1, \dots, a_{k+1}) &= a_1 \dots a_{k+1} \times \\ &\int_0^1 \int_0^{1-y_1} \int_0^{1-y_1-y_2} \dots \int_0^{1-y_1-y_2-\dots-y_k} dy_{k+1} \dots dy_3 dy_2 dy_1 \\ &= a_1 \cdot a_2 \dots a_{k+1} V_{k+1}(1, \dots, 1). \end{aligned} \quad (4)$$

The integration over y_{k+1} can be performed, and we find

$$\begin{aligned}
 V_{k+1}(1, \dots, 1) &= \\
 &\int_0^1 \int_0^{1-y_1} \int_0^{1-y_1-y_2} \dots \int_0^{1-y_1-y_2-\dots-y_{k-1}} (1-y_1-y_2-\dots-y_k) dy_k \dots dy_2 dy_1 \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-y_1} \int_0^{1-y_1-y_2} \dots \int_0^{1-y_1-y_2-\dots-y_{k-1}} dy_k \dots dy_2 dy_1 - \sum_{i=1}^k I_i, \quad (5)
 \end{aligned}$$

where

$$I_i = \int_0^1 \int_0^{1-y_1} \int_0^{1-y_1-y_2} \dots \int_0^{1-y_1-y_2-\dots-y_{k-1}} y_i dy_k \dots dy_2 dy_1, \quad i = 1, \dots, k. \quad (6)$$

The integral in the last line of equation (5) is just $V_k(1, \dots, 1)$, which equals $1/k!$ by the inductive hypothesis. We shall prove that

$$I_1 = I_2 = \dots = I_k = \frac{1}{(k+1)!}. \quad (7)$$

This will complete the proof, for by equations (4) and (5) we find that

$$V_{k+1}(a_1, \dots, a_{k+1}) = a_1 \dots a_{k+1} \left[\frac{1}{k!} - \frac{k}{(k+1)!} \right] = \frac{a_1 \dots a_{k+1}}{k+1!},$$

as required.

To evaluate I_1 , we rewrite the upper limits in (6), obtaining

$$I_1 = \int_0^1 y_1 \left[\int_0^{(1-y_1)} \int_0^{(1-y_1)(1-y_2/(1-y_1))} \dots \int_0^{(1-y_1)(1-y_2/(1-y_1))-\dots-y_{k-1}/(1-y_1)} dy_k \dots dy_2 \right] dy_1.$$

But the expression in brackets is just $V_{k-1}(1-y_1, \dots, 1-y_1)$ [see equation (3)].

Hence,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 y_1 V_{k-1}(1-y_1, \dots, 1-y_1) dy_1 = \int_0^1 (1-y_1) V_{k-1}(y_1, \dots, y_1) dy_1 \\
 &= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 (1-y_1) y_1^{k-1} dy_1 = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 y^{-1} dy_1^k - \int_0^1 y_1^k dy_1 = \frac{1}{(k+1)!}.
 \end{aligned}$$

The key step here is the use of the induction hypothesis in going from the second to the third equation. To show that $I_i = I_1, i = 2, \dots, k$, we change the order of integration in I_i so that we integrate with respect to y_i last. This changes the upper limits in

(6), and the resulting expression can be evaluated by exactly the same procedure used for I_1 . The proof is complete.

Richard S. Ellis*,
University of Massachusetts, Amherst, USA

*) Supported in part by National Science Foundation Grant GP-28576.

REFERENCES

- [1] GEORGE B. THOMAS, JR., *Calculus and Analytic Geometry*, Part 2, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1972).

Elementarmathematik und Didaktik

Eine Übertragung der Formel von Gauss-Bonnet auf ebene Netze

Bei geeigneter Übertragung der Begriffe *Gauss'sche Krümmung* und *geodätische Krümmung* auf ebene Netze kann man zu einer kombinatorischen Formel gelangen, die eine gewisse Analogie zur Formel von Gauss-Bonnet aufweist; bei dieser Übertragung handelt es sich um eine Diskretisierung der innergeometrischen Krümmungsbegriffe.

Für den Umfang S eines in einem 2dimensionalen Flächenstück enthaltenen Entfernungskreises mit geodätischem Radius r und Zentrum P erhält man ([3], S. 204)

$$S = 2\pi r - \frac{K_0 \pi}{3} r^3 + \dots, \quad (1)$$

wobei K_0 die Gauss'sche Krümmung in P ist; K_0 ist also ein Mass für die Abweichung dritter Ordnung von S gegenüber dem Umfang eines Kreises mit demselben Radius r in der euklidischen Ebene.

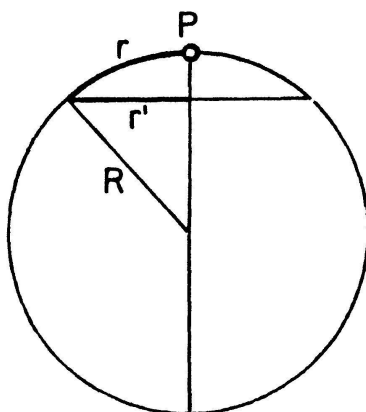


Fig. 1

Auf der Kugel mit Radius R ist die Gauss'sche Krümmung $K = \text{const.} = (1/R)^2$; ein Entfernungskreis mit geodätischem Radius r ($r < R\pi/2$) ist ein Kleinkreis mit