Eigenvalues of Real Symmetric Matrices

Nearly every linear algebra book contains a proof that the characteristic roots of a real symmetric matrix A are real. The proofs use either a complex eigenvector of A or the compactness of the unit sphere to find a vector which maximizes the quadratic form $<x, Ax>$. The following is a new direct proof not using complex numbers or compactness, indeed not even using matrices.

Proposition. All characteristic roots of a symmetric operator on a real finite dimensional inner product space are real.

Proof. If A is symmetric and $p(x)=(x-a)^2+b$ is a factor of the minimal polynomial of A, there is a vector $v \neq 0$ such that $p(A)v=0$. Then $0 \leq <(A-aI)v, (A-aI)v> = <v, (A-aI)^2 v> = (-b)<v, v>$ so $b \leq 0$ and p has real roots. If w is an eigenvector for one of these roots the orthogonal complement of w is A-invariant and A restricted to it is symmetric. By induction on dimension the proof as well as the diagonalization of A is completed.

Note that the last two sentences of the proof are needed only to guarantee (without using complex eigenvectors) that all the irreducible factors of the characteristic polynomial are also factors of the minimal polynomial.

Ladnor Geissinger, University of North Carolina, USA

Aufgaben

Aufgabe 745. In einem ebenen Quadratgitter bezeichne A eine «Figur», d.h. eine nichtleere endliche Menge von Gitterquadraten, $n(A)$ deren Anzahl. Weiter sei $q^2(A)$ die Anzahl der Gitterquadrate in einem kleinsten, A enthaltenden achsenorientierten Quadrat im Gitter. Schliesslich setze man $d(A) := n(A)/q^2(A)$. Es wird nun eine Folge $A_0, A_1, \ldots, A_m, \ldots$ von Figuren wie folgt definiert: A_0 ist eine beliebige Ausgangsfigur; A_m entsteht aus A_{m-1}, indem man jedes Gitterquadrat hinzufügt, das mit einem solchen von A_{m-1} mindestens eine Gitterstrecke gemeinsam hat. Beweise, dass $d(A_m) \to \frac{1}{2}$ $(m \to \infty)$, unabhängig von A_0.

P. Wilker, Bern

1. Lösung. W^k sei ein Quadrat im Gitter mit der Seitenzahl k. Das Glied W^k_m der mit W^k beginnenden Folge besitzt $n(W^k_m)=2m(m-1)+4km+k^2$ Gitterquadrate und sein einhüllendes Quadrat hat deren $q^2(W^k_m)=(k+2m)^2$. Beides ist leicht einzusehen.

Sei nun A_0 eine beliebige Ausgangsfigur, W^1 ein Gitterquadrat innerhalb A_0 und W^k ein kleinstes, A_0 enthaltendes Quadrat im Gitter. Die aus diesen drei Figuren entstehenden Folgen sollen A_m, W^1_m, W^k_m lauten. Aus $W^1 \subseteq A_0 \subseteq W^k$ folgt, wie sofort ersichtlich, $W^1_m \subseteq A_m \subseteq W^k_m$ und hieraus

$$n(W^1_m)=2m^2+2m+1 \leqslant n(A_m) \leqslant 2m^2+(4k-2)m+k^2=n(W^k_m).$$

Weiter ist $(1+2m)^2 \leqslant q^2(A_m)=(k+2m)^2$, und man erhält durch Kombination dieser Ungleichungen

$$\frac{2m^2+2m+1}{(2m+k)^2} \leqslant d(A_m) \leqslant \frac{2m^2+(4k-2)m+k^2}{(2m+1)^2}.$$

Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Ch. Meier, Bern

2. Lösung (mit N-dimensionaler Verallgemeinerung). Die N-dimensionale Verallgemeinerung lautet: Eine «Figur» A ist eine nichtleere endliche Menge von Gitterwürfeln der Kantenlänge 1; $q(A)$ sei die Kantenlänge eines kleinsten A enthaltenden Würfels aus Gitterwürfeln. A' entstehe aus A durch Hinzunahme aller Einheitswürfel, welche an wenigstens einer $(N-1)$-dimensionalen Seitenfläche von einem Element von A anliegen. Ein Minimalwürfel zu A muss wenigstens ein Paar von gegenüberliegenden $(N-1)$-dimensionalen Seitenflächen derart haben, dass an jeder von ihnen wenigstens ein Element v bzw. w von A anliegt; denn sonst wäre dieser Würfel nicht minimal. Beim Übergang zu A' sorgen v' und w' dafür, dass $q(A')=q(A)+2$, also, bei $A_m=A'_{m-1}$

$$q(A_m)=q(A_0)+2m. \tag{1}$$

Ein achsenparalleler Würfel der Kantenlänge k enthält (als konvexe Hülle der Seitenflächen-Mittelpunkte) ein verallgemeinertes «Oktaeder» der Diagonalenlänge k mit dem Volumen $k^N/N!$. Derselbe Würfel ist enthalten in einem dazu ähnlichen und ähnlich gelegenen «Oktaeder» der Diagonalenlänge $2k$, mit dem Volumen $(2k)^N/N!$. Man betrachte nun einen einzelnen Gitterwürfel w_0 aus einer Figur A_0 und die aus ihm entstehenden Figuren $w'_0=w_1 \subseteq A_1, \ldots, w_m \subseteq A_m$; w_1 enthält ein Oktaeder der Diagonalenlänge 2, und bei jedem Schritt wächst die Diagonalenlänge des in w_m und damit in A_m enthaltenen «Oktaeders» um 2, so dass für die Anzahl der Einheitswürfel in A_m gilt

$$n(A_m) \geqq \frac{(2m)^N}{N!}. \tag{2}$$

Andererseits liegt der A_0 umbeschriebene Minimalwürfel der Kantenlänge $q(A_0)$ in einem «Oktaeder» der Diagonalenlänge $2q(A_0)$, A_1 in einem solchen einer um 2 vermehrten Diagonalenlänge, und A_m schliesslich in einem «Oktaeder» der Diagonalenlänge $2\left(q(A_0)+m\right)$, also

$$n(A_m) \leqq \frac{2^N\left(q(A_0)+m\right)^N}{N!} = \frac{2^N m^N}{N!}\left(1+\frac{q(A_0)}{m}\right)^N. \tag{3}$$

Das Verhältnis der Anzahl der Gitterwürfel von A_m zum Volumen des achsenparallelen umbeschriebenen Minimalwürfels ist nach (1)

$$d(A_m)=\frac{n(A_m)}{(q(A_0)+2m)^N}=\frac{n(A_m)}{2^N m^N\left(1+\dfrac{q(A_0)}{2m}\right)^N}. \tag{4}$$

Aus (2) und (3) erhält man

$$\frac{1}{N!\left(1+\dfrac{q(A_0)}{2m}\right)^N}\leqq d(A_m)\leqq\frac{1}{N!}\left[\frac{1+\dfrac{q(A_0)}{m}}{1+\dfrac{q(A_0)}{2m}}\right]^N,$$

und daraus schliesslich

$$\lim_{m\to\infty} d(A_m)=\frac{1}{N!}.$$

Bemerkung. Unabhängig von der Ausgangsfigur nähert sich A_m immer mehr einem «Oktaeder».

D. Laugwitz, Darmstadt, BRD

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), J. Binz (Bolligen BE), Ch. Blatter (Zürich), L. Kuipers (Mollens VS), D. Laugwitz (Darmstadt, BRD; 2. Lösung), O.P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), Hj. Stocker (Wädenswil ZH) und M. Vowe (Therwil BL).

Aufgabe 746. Eine Ungleichung am ebenen Dreieck mit Gleichheit genau für das gleichseitige Dreieck habe die Gestalt

$$0<X=Ls^2\leq Mr^2+NrR+PR^2=Y,$$

worin L, M, N, P von s, r, R unabhängige reelle Zahlen sind. Man bestimme bei festem $u>0$ und festem $v<2u$ die grösstmögliche Konstante $k\geq 0$, welche die Verschärfung

$$X+k(R-2r)(uR-vr)\leq Y$$

von $X\leq Y$ gestattet.

I. Paasche, München, BRD

Lösung des Aufgabenstellers. Auf das unnötig einschränkende Wort «genau» der Aufgabenstellung verzichten wir. In Spezialfällen bestimmt sich $k=k_{\max}$ leicht: $4s^2+k(R-2r)R\leqq n^2r^2+m^2rR+27R^2$ $(m,n$ reell) zeigt $k_{\max}=11$ wegen des möglichen ausgearteten Grenzfalles $s{:}R{:}r=2{:}1{:}0$, bei dem übrigens Gleichheit $4s^2=16R^2$ eintritt. In $s^2+k(R-2r)R\leqq 3r^2+4rR+4R^2$ ist aus demselben Grunde, $k_{\max}=0$, usw. Im allgemeinen Fall stützen wir uns auf [1], Theorem 1. Die Ungleichung

$$0<Ls^2+k(R-2r)(uR-vr)\leqq Mr^2+NrR+PR^2\ (k\geqq 0), \tag{0}$$

also

$$0<Ls^2 \leqq (M-2\,vk)\,r^2+(vk+N+2\,uk)\,rR+(-uk+P)\,R^2 \tag{1}$$

bedeutet nach Division durch L genau

$$0<s^2 \leqq (3-2\,T)\,r^2+(T+4-2\,U)\,rR+(U+4)\,R^2 \tag{2}$$

mit geeigneten $T, U,$ weil Gleichheit für $s{:}R{:}r=3\sqrt{3}{:}2{:}1$ (gleichseitiges Dreieck) besteht:

$$27=(3-2\,T)1-(T+4-2\,U)2+(U+4)4\,.$$

Nach [1] Theorem 1 zerfällt die Gesamtheit der für alle ebenen Dreiecke gültigen Ungleichungen (2) in die beiden folgenden Klassen:

(c_0)	$T \geqq 0$ und $U \geqq 0$	Klasse c_0
(d_0)	$T<0$ und $U \geqq T^2(4-2\,T)^{-1}>0$	Klasse d_0.

Andere allgemein gültige Ungleichungen (2) mit sonst unbeschränkten variablen T, U gibt es nicht. Für unsere Zwecke ist nun ein anderer, ebenfalls erschöpfender Klassenzerfall nicht nur vorteilhaft, sondern einschlägig: Jedes t aus $0 \leqq t \leqq 2$ gestattet die beiden komplementären Klassen

(c_t)	$T+tU \geqq 0$ und $U \geqq 0$	Klasse c_t
(d_t)	$T+tU<0$ und $U \geqq T^2(4-2\,T)^{-1}>0$	Klasse d_t.

Wir behaupten: Bei variablem t ist die Klasse c_2 maximal, ihr Komplement d_2 also minimal. Beweis: Für $T=-2\,U-\varepsilon \leqq -2\,U$ besagt $U \geqq T^2(4-2\,T)^{-1}$ offenbar $4\,U \geqq 2\,U\varepsilon+\varepsilon^2 \geqq 0$. Jetzt erkennt man:

$\varepsilon=0$ bewirkt $U=0$, also Klasse c_2
$\varepsilon>0$ bewirkt $U>0$, also Klasse d_2. Beweisende.

Für die Tatsache, dass (0), (1), (2) für gewisse k in Klasse c_2 oder d_2 liegt, verabreden wir eine naheliegende Sprechweise: die betreffenden Werte der Variablen $k \geqq 0$ liegen in c_2 oder d_2, kurz k in c_2 oder d_2 (mindestens also $k=0$). Wenn nun $k=0$ mit Parametern T', U' in c_2 liegt, so kann es maximal sein. Dann liegt für alle $u>0$ und $2u-v>0$ kein k in d_2. Gibt es jedoch eine Verschärfung $k>0$ mit Parametern $T, U,$ so kann dieses k (nach $k=0$ in c_2) jeder der beiden Extremalklassen c_2 und d_2 angehören: Gemäss (1) (2) (c_2) (d_2) folgt aus $L(T'+2\,U')=(3L-M)/2+2(P-4L) \geqq 0$ nur $L(T+2\,U)=(3L-M+2vk)/2+2(P-4L-uk) \gtreqless 0$, woraus Klasse c_2 $(\geqq)$ oder d_2 $(<)$ ablesbar ist. Liegt jedoch $k=0$ in d_2, so auch jede mögliche Verschärfung $k>0$. Dann tritt c_2 überhaupt nicht auf. Wir zeigen: Das optimale $k=k_{\max}$ existiert (ausser im beiseitegelassenen Trivialfall $u=v=0$, wo jedes $k \geqq 0$ erlaubt ist) und lässt sich sogar explizit als

Funktion von u und v bestimmen, indem T, U durch u, v, k und drei der L, M, N, P ausgedrückt werden: Insgesamt zeigt der Koeffizientenvergleich in (1) (2)

$$\begin{array}{lll} M-2vk & = 3L-2LT & \cdot 1 \\ N+2uk+vk & = 4L+LT-2LU & \cdot 2 \\ P-uk & = 4L+LU & \cdot 4 \\ M+2N+4P+0+0=27L+0+0 & & \text{(gewichtete Summenprobe).} \end{array} \tag{3}$$

Liegt nun irgendein $k \geqq 0$ in (der Klasse «kleiner» k) c_2, so findet man das grösste k $(=k_{\max})$ aus c_2 so: Aus dem Ungleichungspaar (c_2) folgt das Paar $0 \leqq 2L(T+2U) = -13L-M+4P-2(2u-v)k$ und $0 \leqq LU = P-uk-4L$, und hieraus vermöge (3) das Paar $k \leqq (-20L+N+4P)/(2u-v)$ und $k \leqq (P-4L)/u$. Das grösste noch in c_2 liegende k ist also

$$k = \min\left(\frac{-20L+N+4P}{2u-v}, \frac{P-4L}{u}\right) \leqq k_{\max}; \text{ letzteres in } c_2\,(=) \text{ oder } d_2\,(<). \tag{4}$$

Die beiden Nenner sind nach Voraussetzung > 0. Die beiden Zähler sind $\geqq 0$, weil auch $k=0$ in c_2 liegt. Probe: $(-20L+N+4P)/L = -20+(T'+4-2U')+4\cdot(4+U') = T'+2U' = \geqq 0$ und $(P-4L)/L = (4+U')-4 = U' \geqq 0$. - Liegt jedoch (das vorerst nur vermutete) $k_{\max}$ nicht in c_2, was sich schon durch irgendein k aus d_2 ankündigt, so untersucht man d_2 analog mittels (1), (2), (3), (d_2): $(-20L+N+4P)/(2u-v) < k$ und

$$0 < \frac{LT\cdot LT}{4L-2LT} = \frac{(M-3L-2vk)^2}{4(M+L-2vk)} \leqq P-uk-4L = LU.$$

Hieraus ist $k_{\max} \geqq 0$ bestimmbar als die grössere der (für $v \neq 0$) beiden Wurzeln k der höchstens quadratischen Gleichung in k (für sie ist $-20L+N+4P < 2uk-vk$)

$$(M-3L-2vk)^2 = 4(M+L-2vk)(P-uk-4L). \tag{5}$$

Dass die Diskriminante $\geqq 0$ ist, wird durch [1] gesichert, kann aber auch hier durch Rechnung bestätigt werden. - Beispiele: $4s^2+k(R-2r)(R+r) \leqq 27R^2$ hat $k_{\max} = 5+(1/3)\sqrt{249} \approx 10{,}26$; das ist eine in d_2 liegende Wurzel k der Gleichung $3k^2-30k-8=0$. Das grösste k aus c_2 ist $k=28/3=9{,}3\ldots$ Selbstverständlich ist (5) wegen des ausgeschlossenen Trivialfalles $u=v=0$ stets nach k auflösbar. Aber die so gefundene grösste Wurzel k braucht nicht in d_2 zu liegen und braucht dann auch nicht $k_{\max}$ zu sein. Dieser Fall tritt ein bei $k=2$ (in c_2) für $4s^2+k(R-2r)R \leqq 27R^2$. Auch $k_{\max}=11$ liegt in c_2, so dass d_2 nicht vorkommt. Dagegen ist die grössere der beiden Wurzel $k=0$ und $-4/3$ von (5) im Fall $s^2+k(R-2r)R \leqq 3r^2+4rR+4R^2$ wohl in c_2, stellt aber zugleich $k_{\max}$ dar. Auch hier kommt d_2 nicht vor. In praxi hat man zuerst (5) nach k aufzulösen, es sei denn $k_{\max}$ sei anderweitig unmittelbar evident, wie eingangs durch die Ausartung $s{:}R{:}r = 2{:}1{:}0$. Liegt die einzige oder die grössere Wurzel k jedoch in c_2, so auch $k_{\max}$, gewinnbar aus (4).

Anmerkung. Beliebig viele bekannte und weitere Dreiecksungleichungen (auch in a, b, c; r_a, r_b, r_c; $s_a, s_b, s_c = s-a, s-b, s-c$; usw.) können mittels (4) (5) k-verschärft werden, falls sie nicht schon k-optimal sind ($k_{\max} = 0$). – Die nicht verlangten, aber beachtenswerten Grenzfälle $u = 0 > v$ und $2u - v = 0$ schliessen sich unserer Methode stetig an. Wenn man will, verwendet man dann bei (4) in bekannter Art das praktische Symbol $+\infty$.

[1] FRUCHT/KLAMKIN, *On Best Quadratic Triangle Inequalities*, Geometriae Dedicata *2*, 341–348 (1973).

Eine Teillösung sandte M. Vowe (Therwil BL).

Aufgabe 747. Es sei a eine ganze Zahl. Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 3$ wird der Quotient

$$A_n := \frac{(n-3)!\,(n-1)[a n^2 + (2a+3)n - 2] + 1}{n(n+2)}$$

ganzzahlig? I. Paasche, München, BRD

Lösung. Es bezeichne B_n den Zähler von A_n. Für jedes $n \geq 3$ ist B_n ungerade. Somit ist jede natürliche Zahl n der verlangten Art ungerade, und n und $n+2$ sind teilerfremd. Also gilt $n(n+2) \mid B_n \Leftrightarrow n \mid B_n$ und $(n+2) \mid B_n$. Man bestätigt leicht das Bestehen der Kongruenzen

$$B_n \equiv (n-3)!\,(n-1)(-2) + 1 \equiv (n-1)! + 1 \pmod{n}, \tag{1}$$

$$B_n \equiv (n-3)!\,(n-1)(-8) + 1 \equiv (n+1)! + 1 \pmod{n+2}. \tag{2}$$

Nach dem Satz von Wilson (man beachte, dass auch dessen Umkehrung gilt) folgt aus (1) und (2)

$$B_n \equiv 0 \pmod{n} \Leftrightarrow n \text{ ist eine Primzahl},$$

$$B_n \equiv 0 \pmod{n+2} \Leftrightarrow n+2 \text{ ist eine Primzahl}.$$

Die Antwort lautet also: A_n ist genau dann ganzzahlig, wenn n und $n+2$ Primzahlen sind.

J. Fehér, Pécs, Ungarn

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), G. Bercea (München, BRD), J. Binz (Bolligen BE), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), K. Grün (Linz, Österreich), H. Harborth (Braunschweig, BRD), L. Kuipers (Mollens VS), R. Tichy (Wien, Österreich), M. Vowe (Therwil BL) und A. Wieckowski (Poznán, Polen).

Aufgabe 748. Für natürliche Zahlen n, k bezeichne $[(n+1)(n+2)\cdot\ \ldots\ \cdot(n+k)]'$ das Produkt der Nichtprimzahlen in der Folge $n+1, n+2, \ldots, n+k$. Man zeige, dass $6!=8\cdot 9\cdot 10$ die einzige Lösung der Gleichung $n!=[(n+1)(n+2)\cdot\ \ldots\ \cdot(n+k)]'$ ist.

P. Erdös, Budapest, Ungarn

Lösung. Aus $n!=[(n+1)(n+2)\cdots(n+k)]'$ kann man die 2 möglichen Werte von k bei gegebenem n berechnen, indem man für beide Glieder die höchste Potenz von 2 bestimmt, die das Glied teilt. Für kleine Werte von n, z.B. $n\leq 20$, findet man sofort, dass nur $n=6$ eine Lösung ist.

Es ist klar, dass die Gleichung falsch ist, wenn es eine Primzahl $p>3$ gibt, so dass

$$\frac{n+k}{4}<p\leq\frac{n+k}{3}; \qquad (*)$$

denn in diesem Falle können die p-Potenzen auf beiden Seiten nicht gleich sein. Aus

$$\pi(x)>\frac{x}{\log x}\left(1+\frac{1}{2\log x}\right) \text{ für } x\geq 59,$$

$$\pi(x)<\frac{x}{\log x}\left(1+\frac{3}{2\log x}\right) \text{ für } x>1,$$

[s. J. Barkley Rosser and L. Schoenfield, Approximate formulas for some functions of prime numbers, Illinois J. of Math. *6*, 64–94 (1962)] folgt, dass

$$\pi\left(\frac{4}{3}x\right)>\pi(x) \text{ für } x>100. \qquad (**)$$

Durch Vergleichung mit einer Liste von Primzahlen folgt dann sogar (**) für $x\geq 9$. Also gibt es eine Primzahl p mit der Eigenschaft (*) für $n>20$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

J.H. van Lint, Eindhoven, Niederlande

Weitere Lösungen sandten H. Harborth (Braunschweig, BRD) und H. Warncke (Porto Alegre, Brasilien).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis **10. Februar 1977** an **Dr. H. Kappus.** Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

Aufgabe 769. In einer Ebene ε seien 3 Punkte A_1, A_2, A_3 gegeben. Es gibt genau zwei gleichwinklige Kreisbogendreiecke in ε mit den Ecken A_i und Winkeln $\alpha_i = \alpha$, $0 \leq \alpha < \pi$. Man bestimme die Kugel K mit Zentrum in ε so, dass bei der stereographischen Projektion von ε auf K jene beiden Dreiecke in zwei kongruente, gleichseitige Kreisbogendreiecke abgebildet werden.

C. Bindschedler, Küsnacht

Aufgabe 770. Let λ be an integer ≥ 1. A positive integer n is called λ-perfect, if $\sigma(n) = 2\lambda n$, where $\sigma(n)$ denotes the sum of all positive divisors of n. Prove the following results for odd λ-perfect numbers:

(i) If λ is odd, then any odd λ-perfect number is of the Form $p^a k^2$, where p is a prime $\equiv 1 \pmod 4$, $a \equiv 1 \pmod 4$ and $(p,k) = 1$.

(ii) If λ is odd and $\not\equiv 0 \pmod 3$, then any odd λ-perfect number is of the form $12t+1$ or $36t+9$.

(iii) If n is of the form $12t+1$, then $n = p^a k^2$ with p prime and $\equiv 1 \pmod{12}$ and $a \equiv 1$ or $9 \pmod{12}$.

D. Suryanarayana, Waltair, India

Aufgabe 771. Es seien a_i $(i = 1, 2, 3)$ die Seitenlängen eines beliebigen ebenen Dreiecks. Man beweise die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{3} (a_i/a_{i+1}) > \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{3} a_i\right) \left(\sum_{i=1}^{3} 1/a_i^2\right)^{1/2} \quad (a_4 = a_1).$$

J. Brejcha, Brno, ČSSR

Aufgabe 772. Sei $a \geq 1$ ganzzahlig und die Folge $(R_k)_{k=0,1,\ldots}$ rekursiv definiert durch

$$R_0 = 0, \quad R_1 = 1, \quad R_k = a R_{k-1} + R_{k-2} \text{ für } k \geqq 2.$$

Man beweise

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{R_{2^i}} = 1 + \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - \frac{1}{2}(a^2+4)^{1/2}$$

und damit die Irrationalität dieser Reihe.

P. Bundschuh, Köln, BRD