Satz über reguläre primitive *n*-komponierbare Graphen. *Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es nur genau einen regulären primitiven n-komponierbaren Graphen Γ, nämlich den vollständigen Graphen V_{2n} mit $2n$ Knotenpunkten.*

Beweis. Für $n=1$ trifft die Aussage sicher zu. Ein 1-komponierbarer Graph Γ ist nämlich notwendig isomorph mit einem Baum B. Und da jeder Baum B mindestens zwei Knotenpunkte a vom Grade $\gamma(a,B)=1$ enthält, gibt es unter allen Bäumen nur genau einen regulären Graphen, nämlich den aus einer Kante bestehenden Graphen $k=V_2$.

Es sei jetzt Γ ein primitiver n-komponierbarer Graph regulär vom Grade r und $n>1$. Für Γ gilt dann $2\alpha_1(\Gamma)=r\alpha_0(\Gamma)$ und $\alpha_1(\Gamma)=n(\alpha_0(\Gamma)-1)$, woraus man die Beziehung

$$2n=\alpha_0(\Gamma)(2n-r) \tag{2}$$

gewinnt.

Aus (2) folgt $\alpha_0(\Gamma)\leqq 2n$. Angenommen, es gilt $\alpha_0(\Gamma)\leqq 2n-2$. Dann ist $c(\Gamma)\leqq c(V_{2n-2})$. Aus dem Hilfssatz folgt aber $c(V_{2n-2})\leqq n-1$, so dass sich der Widerspruch $c(\Gamma)\leqq n-1$ ergibt.

Man hat also $\alpha_0(\Gamma)=2n-1$ oder $2n$. Aus $\alpha_0(\Gamma)=2n-1$ und (2) folgt, dass $2n-1$ ein Teiler von $2n$ ist. Wegen $n>1$ ist das aber ein Widerspruch. Man erhält damit schliesslich $\alpha_0(\Gamma)=2n$, woraus sich auf Grund von (2) für r die Beziehung $r=2n-1$ ergibt. Ein Graph Γ mit $2n$ Knotenpunkten regulär vom Grade $r=2n-1$ ist aber notwendig isomorph mit dem vollständigen Graphen V_{2n}.

Damit ist jetzt bewiesen: Falls es einen regulären primitiven n-komponierbaren Graphen Γ gibt, so muss Γ mit dem vollständigen Graphen V_{2n} isomorph sein. Aus dem Hilfssatz folgt aber, dass der vollständige Graph V_{2n} in der Tat ein regulärer primitiver n-komponierbarer Graph ist.

Es hat sich damit gezeigt:

Die vollständigen Graphen mit gerader Knotenpunktanzahl sind die einzigen unter den regulären Graphen Γ, welche eine Darstellung als Vereinigung von paarweise kantendisjunkten Gerüsten zulassen.

Horst Bergmann, Hamburg

LITERATURVERZEICHNIS

[1] K. Wagner, *Graphentheorie* (Mannheim 1970).

[2] L. Friess, *Graphen, worin je zwei Gerüste isomorph sind,* Math. Ann. *204,* 65-71 (1973).

[3] H. Bergmann, *Über die Darstellung planarer Graphen als Vereinigung von Bäumen,* Arch. Math. *26,* 332-336 (1975).

[4] H. Bergmann, *Ein Beitrag zur Theorie der endlichen n-komponierbaren Graphen,* Math. Nachr. *66,* 25-34 (1975).

Kleine Mitteilungen

Ein Gleichverteilungskriterium

Wir betrachten eine Folge von ganzen rationalen Zahlen $(\kappa_n), n=1,2,\ldots$ und eine natürliche Zahl $m\geq 2$. Die Folge (κ_n) heisst gleichverteilt mod m wenn für $h=0,1,\ldots,m-1$ die Limesbeziehung

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}.card\{n \mid 1\le n\le N, \kappa_n\equiv h\,(\operatorname{mod} m)\}=\frac{1}{m}$$

gilt ([1]).

In dieser Mitteilung beweisen wir die folgende Eigenschaft.

Proposition. Die Folge von ganzen Zahlen (κ_n) ist gleichverteilt mod $m, m\in\mathbf{Z}$ mit $m\ge 2$ dann und nur dann, wenn für $h=0,1,\dots,m-1$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[\kappa_n+h]_m=\frac{m-1}{2} \tag{1}$$

gilt. Hier bedeutet $[a]_m$ für $a\in\mathbf{Z}$ den Rest von a modulo m, wobei vorausgesetzt wird, dass $0\le[a]_m\le m-1$ ist.

Beweis. Sei die Folge (κ_n) gleichverteilt modulo m. Dann ist auch für jede ganze Zahl h die Folge $([\kappa_n+h]_m)$ gleichverteilt modulo m. Deshalb hat man

$$\sum_{n=1}^{N}[\kappa_n+h]_m=\sum_{j=0}^{m-1}\left[\frac{N}{m}+o(N)\right]j=\frac{N}{m}\sum_{j=1}^{m-1}j+o(N)=\frac{m-1}{2}\cdot N+o(N).$$

Jetzt zeigen wir, dass die Bedingung (1) genügend ist. Also wird vorausgesetzt, dass für $h=0,1,\dots,m-1$

$$\sum_{n=1}^{N}[\kappa_n+h]_m=\frac{m-1}{2}\cdot N+o(N). \tag{2}$$

Wir betrachten erst den Fall $h=0$. Wir setzen

$$A(\kappa_n,N,j)=card\{n\mid 1\le n\le N, \kappa_n\equiv j\,(\operatorname{mod} m)\}.$$

Dann folgt aus (2)

$$\sum_{j=1}^{m-1}A(\kappa_n,N,j)j=\frac{m-1}{2}\cdot N+o(N). \tag{3}$$

Für $h=m-1$ hat man

$$\sum_{j=1}^{m-1}A(\kappa_n+m-1,N,j)j=\frac{m-1}{2}\cdot N+o(N)$$

d.h.

$$\sum_{j=2}^{m-1}A(\kappa_n,N,j)(j-1)+A(\kappa_n,N,0)(m-1)=\frac{m-1}{2}\cdot N+o(N). \tag{4}$$

Für $h=m-2$ ist

$$\sum_{j=1}^{m-1} A(\kappa_n+m-2, N, j)j = \frac{m-1}{2}\cdot N + o(N)$$

d.h.

$$\sum_{j=3}^{m-1} A(\kappa_n, N, j)(j-2) + A(\kappa_n, N, 0)(m-2) + A(\kappa_n, N, 1)(m-1)$$
$$= \frac{m-1}{2}\cdot N + o(N). \tag{5}$$

Aus (3), (4) und (5) leitet man ab $\big($man nimmt $(3)+(5)-2\cdot(2)\big)$, dass

$$mA(\kappa_n, N, 1) - mA(\kappa_n, N, 0) = o(N)$$

d.h.

$$A(\kappa_n, N, 1) = A(\kappa_n, N, 0) + o(N). \tag{6}$$

Sei $k=1,2,\ldots,m$. Wir haben

$$\sum_{n=1}^{N} [\kappa_n + h]_m = \frac{m-1}{2}\cdot N + o(N) \text{ für } h = 0,1,\ldots,m-1,$$

deshalb auch

$$\sum_{n=1}^{N} [(\kappa_n - k) + h]_m = \frac{m-1}{2}\cdot N + o(N) \text{ für } h = 0,1,\ldots,m-1.$$

Benutzen wir (5) mit $\kappa_n - k$ statt κ_n so folgt

$$A(\kappa_n - k, N, 1) = A(\kappa_n - k, N, 0) + o(N),$$

und daraus

$$A(\kappa_n, N, k+1) = A(\kappa_n, N, k) + o(N) \text{ für } k = 1,2,\ldots,m.$$

Deshalb ist

$$A(\kappa_n, N, 0) + o(N) = A(\kappa_n, N, 1) + o(N) = \ldots = A(\kappa_n, N, m-1) + o(N)$$

und das bedeutet, dass die Folge (κ_n) gleichverteilt modulo m ist.

L. Kuipers, Mollens (Valais), Schweiz, und Jau-shyong Shiue,
National Chengchi University, Taiwan

LITERATURVERZEICHNIS

[1] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences,* Ch. 5, p. 305 (1974).

On Two Conjectures of Schinzel

A. SCHINZEL [2] conjectured that for every positive integer k

$$\lim_n\inf \frac{1}{n} \sigma^{(k)}(n) < \infty\,, \tag{1}$$

where $\sigma^{(1)}(n)=\sigma(n)$, $\sigma^{(k+1)}(n)=\sigma[\sigma^{(k)}(n)]$. Inequality (1) is true for $k=1$ and $k=2$, moreover, we have the equalities $\lim_n\inf \frac{1}{n}\sigma(n)=\lim_n\inf \frac{1}{n}\sigma^{(2)}(n)=1$ (cf. [1]).

Schinzel also conjectured ([3], conjecture H) that if 1° $f_1, f_2, \ldots, f_n$ are irreducible polynomials with integer coefficients and positive leading coefficients and 2° there is no integer $d>1$ which divides all the numbers $f_1(m)f_2(m)\ldots f_n(m)$ (m is an integer), then there exist infinitely many positive integers x such that all the numbers $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ are primes. He and SIERPIŃSKI [3] deduced from the conjecture H many interesting corollaries.

In the present note we deduce the inequality (1) from the conjecture H.

The polynomials $2^j x+1$ ($j=1,2,\ldots,k$) satisfy the conditions 1° and 2°, thus there exists an infinite set S of positive integers such that the numbers $2^j x+1$ for $j=1,2,\ldots,k$ and $x\in S$ are prime numbers.

We define the sequence $A(m)$ by the formulae

$$A(1)=2,$$
$$A(m+1)=2\sigma(A(m))\,.$$

It may be remarked that if $1\leqslant n\leqslant 5$ then $A(n)=(n+1)!=2\sigma(n!)$.

Let $x\in S$, $x\geqslant A(k)$. Then for $m\leqslant k$ we have

$$\sigma^{(m)}(2^k x+1)=A(m)(2^{k-m}x+1)\,. \tag{2}$$

We prove this formula by induction on m. For $m=1$ we have

$$\sigma^{(1)}(2^k x+1)=2(2^{k-1}x+1)=A(1)(2^{k-1}x+1)\,.$$

Suppose that for some $m<k$ the formula (2) holds. Then $2^{k-m}x+1>x\geqslant A(k)>A(m)$, thus the prime number $2^{k-m}x+1$ and $A(m)$ are relatively prime and

$$\sigma^{(m+1)}(2^k x+1)=\sigma(A(m))\cdot 2(2^{k-(m+1)}x+1)=A(m+1)(2^{k-(m+1)}x+1)\,.$$

Thus the formula (2) is proved. For $m=k$ we obtain $\sigma^{(k)}(2^k x+1)=A(k)\cdot(x+1)$, hence

$$\lim_n\inf \frac{1}{n}\sigma^{(k)}(n)\leqslant \lim_x\inf \frac{1}{2^k x+1}\sigma^{(k)}(2^k x+1)=$$

$$= \lim_x \inf \frac{A(k)(x+1)}{2^k x+1} = \frac{A(k)}{2^k} < \infty .$$

It may be remarked that the inequality

$$\lim_n \inf \frac{1}{n} \sigma^{(3)}(n) < \infty$$

follows also from the conjecture that there are infinitely many Mersenne primes. Indeed, if $2^p - 1$ is a prime number, then

$$\sigma^{(3)}(2^{p-1}) = \sigma(2^p) = 2^{p+1} - 1$$

and

$$\frac{1}{2^{p-1}} \sigma^{(3)}(2^{p-1}) = 4 - \frac{1}{2^{p-1}} .$$

Therefore

$$\lim_n \inf \frac{1}{n} \sigma^{(3)}(n) \leqslant \lim_p \inf \frac{1}{2^{p-1}} \sigma^{(3)}(2^{p-1}) = 4 .$$

A. Mąkowski, Institute of Mathematics, University of Warsaw

REFERENCES

[1] A. Mąkowski and A. Schinzel, *On the functions $\varphi(n)$ and $\sigma(n)$*, Colloq. Math. *13*, p. 95–99 (1964).

[2] A. Schinzel, *Ungelöste Probleme*, Nr.30, Elem. Math. *14*, p. 60–61 (1959).

[3] A. Schinzel et W. Sierpiński, *Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers*, Acta Arith. *4*, p. 185–208 (1958); corrigendum ibid. *5*, p. 259 (1959).

Elementarmathematik und Didaktik

«Kreisel»

1. Einleitung

Diese Arbeit will ein Axiomensystem für die affine Geometrie propagieren, das meines Erachtens wegen seiner Einfachheit für den Geometrieunterricht an Gymnasien geeignet ist. Es stammt von Werner Bos, der auch den Namen «Kreisel» für seine Modelle vorgeschlagen hat. Einige seiner charakteristischen Züge sind:

1. Die Strukturdaten eines Kreisels (über dem reellen Zahlkörper) lassen sich leicht veranschaulichen.