

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 31 (1976)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Bemerkungen zur Exponentialfunktion mit rationalem Definitionsbereich  
**Autor:** Rüthing, Dieter  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-31406>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 26.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### Bemerkungen zur Exponentialfunktion mit rationalem Definitionsbereich

In [2] wurde für den schönen Nachweis der steigenden Monotonie und der Beschränktheit, also der Konvergenz, der Folge  $((1 + 1/n)^n)$  jeweils an entscheidender Stelle die für alle  $a, b \in \mathbf{R}$  und für alle  $n \in \mathbf{N}$  gültige Gleichung

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1} \quad (1)$$

benutzt. Mit ihr ist ebenfalls im wesentlichen beweisbar der

**Satz.** Für jede Folge nichtnegativer reeller Zahlen  $(a_1, a_2, \dots)$  gilt: Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$  ist, dann ist für alle  $k \in \mathbf{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{g}.$$

*Beweis.* Sei  $(a_1, a_2, \dots)$  eine beliebige gegen  $g$  konvergierende Folge nichtnegativer reeller Zahlen und sei  $k \in \mathbf{N}$  beliebig gewählt.

Für den Beweis ist es günstig, eine Fallunterscheidung zu machen.

1. Fall:  $g = 0$ .

Die Voraussetzung  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  impliziert: Zu jedem  $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$  existiert ein  $n(\varepsilon) \in \mathbf{N}$

derart, dass für alle natürlichen Zahlen  $n > n(\varepsilon)$  folgt, dass  $|a_n - 0| < \varepsilon^k$  ist. Aus der Nichtnegativität der reellen Zahlen  $a_1, a_2, \dots$  und der Monotonie der  $\sqrt[k]{\phantom{x}}$ -Funktion ergibt sich ebenfalls für alle natürlichen Zahlen  $n > n(\varepsilon)$ , dass  $\sqrt[k]{a_n} < \varepsilon$  ist, also auch  $|\sqrt[k]{a_n} - 0| < \varepsilon$  gilt. Damit ist der 1. Fall bewiesen.

2. Fall:  $g \in \mathbf{R}^+$ .

Die Voraussetzung  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$  impliziert: Zu jedem  $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$  existiert ein  $n(\varepsilon) \in \mathbf{N}$

derart, dass für alle natürlichen Zahlen  $n > n(\varepsilon)$  folgt, dass  $|a_n - g| < \varepsilon \cdot (\sqrt[k]{g})^{k-1}$  ist. Da nach (1)

$$a_n - g = (\sqrt[k]{a_n})^k - (\sqrt[k]{g})^k = (\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{g}) \sum_{i=1}^k (\sqrt[k]{a_n})^{k-i} (\sqrt[k]{g})^{i-1}$$

ist, folgt für alle natürlichen Zahlen  $n > n(\varepsilon)$  die Abschätzung

$$\left| \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{g} \right| = \left| \frac{a_n - g}{\sum_{i=1}^k (\sqrt[k]{a_n})^{k-i} (\sqrt[k]{g})^{i-1}} \right| < \frac{|a_n - g|}{(\sqrt[k]{g})^{k-1}} < \varepsilon.$$

Damit ist der 2. Fall bewiesen. Beide Fälle zusammen beweisen den Satz.

Dieser Satz versetzt uns in Verbindung mit den Grenzwertsätzen für Folgen – sie gehören zum Standardstoff zumindest eines Analysisleistungskurses im Gymnasium – und der für alle  $n, x \in \mathbf{N}$  gültigen Gleichung

$$1 + \frac{x}{n} = \prod_{i=0}^{x-1} \left(1 + \frac{1}{n+i}\right) \quad (2)$$

in die Lage, die Exponentialfunktion für den Definitionsbereich  $\mathbf{Q}$  sukzessive zu erklären. Vorab beweisen wir jedoch (2) durch vollständige Induktion über  $x$ . Dazu sei  $n \in \mathbf{N}$  beliebig gewählt.

$$\begin{aligned} x=1: 1 + \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{n+0} = \prod_{i=0}^0 \left(1 + \frac{1}{n+i}\right) \\ x \rightarrow x+1: 1 + \frac{x+1}{n} &= 1 + \frac{x}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{x}{n} + \frac{n+x}{n(n+x)} = 1 + \frac{x}{n} + \frac{1}{n+x} + \frac{x}{n(n+x)} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n+x}\right) = \left[\prod_{i=0}^{x-1} \left(1 + \frac{1}{n+i}\right)\right] \left(1 + \frac{1}{n+x}\right) \\ &= \prod_{i=0}^x \left(1 + \frac{1}{n+i}\right) \end{aligned}$$

Damit sind die Vorbereitungen abgeschlossen. Sie erlauben eine schrittweise und konstruktive Definition der Exponentialfunktion, die zuerst für  $\mathbf{N}$  erklärt wird und dann über  $\mathbf{Z}$  auf  $\mathbf{Q}$  erweitert wird. Wir sind der Meinung, dass dieses konstruktive Vorgehen für den Schüler kanonischer ist als das reihenmässige Vorgehen, da es dem gewohnten Prinzip der Erweiterung entspricht und zudem nur Kenntnisse über Folgen benutzt.

1. Schritt:  $x \in \mathbf{N}$ .

$$\begin{aligned} e^x &= \prod_{i=0}^{x-1} \frac{e}{1} = \prod_{i=0}^{x-1} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+i}\right)^{n+i}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+i}\right)^i} = \prod_{i=0}^{x-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+i}\right)^{n+i}}{\left(1 + \frac{1}{n+i}\right)^i} \\ &= \prod_{i=0}^{x-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+i}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{x-1} \left(1 + \frac{1}{n+i}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\prod_{i=0}^{x-1} \left(1 + \frac{1}{n+i}\right)\right]^n \stackrel{(2)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \end{aligned}$$

2. Schritt:  $x = 0$

$$e^0 = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0}{n}\right)^n$$

3. Schritt:  $x \in \mathbf{Z}^-$

Für jedes  $x \in \mathbf{Z}^-$  gilt die Gleichung  $x = -|x|$ , wobei  $|x| \in \mathbf{N}$  ist.

$$\begin{aligned}
e^x &= e^{-|x|} = \frac{1}{e^{|x|} \cdot 1^{|x|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{|x|}{n - |x|}\right)^{n - |x|} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{|x|}{n - |x|}\right)^{|x|}} \\
&= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{|x|}{n - |x|}\right)^{n - |x|} \cdot \left(1 + \frac{|x|}{n - |x|}\right)^{|x|} \right]} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{|x|}{n - |x|}\right)^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x|}{n - |x|}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - |x|}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{|x|}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

4. Schritt:  $x \in \mathbf{N}^{-1} := \{n^{-1} | n \in \mathbf{N}\}$ .

Zu jedem  $x \in \mathbf{N}^{-1}$  existiert ein  $q \in \mathbf{N}$  derart, dass die Gleichung  $x = q^{-1}$  gilt.

$$\begin{aligned}
e^x &= e^{q^{-1}} = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{qn}\right)^{qn} \right]^{q^{-1}} \stackrel{\text{Satz } n \rightarrow \infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{qn}\right)^{qn} \right]^{q^{-1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{qn}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

5. Schritt:  $x \in \mathbf{Q}$

Zu jedem  $x \in \mathbf{Q}$  existieren  $p \in \mathbf{Z}$  und  $q \in \mathbf{N}$  derart, dass die Gleichung  $x = \frac{p}{q}$  gilt.

$$\begin{aligned}
e^x &= e^{p/q} = [e^p]^{1/q} = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{qn}\right)^{qn} \right]^{1/q} \stackrel{\text{Satz } n \rightarrow \infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{p}{qn}\right)^{qn} \right]^{1/q} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{qn}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

Durch die Zusammenfassung der Schritte 1. bis 5. ist damit die Exponentialfunktion

$$\begin{aligned}
e: \mathbf{Q} &\rightarrow \mathbf{R} \\
x \mapsto e^x &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

folgenmässig erklärt.

Die steigende Monotonie der Exponentialfunktion in  $\mathbf{Q}$  ist über diese Definition aufgrund der Verträglichkeit der  $\lim$ -bildung bei Folgen mit der

Ordnungsstruktur auf  $\mathbf{R}$  - d.h. wenn für zwei konvergente Folgen  $(a_1, a_2, \dots)$  und  $(b_1, b_2, \dots)$  reeller Zahlen für alle  $n \in \mathbf{N}$  gilt, dass  $a_n \leq b_n$  ist, dann ist folglich  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  - leicht zu zeigen. Seien dazu  $x, y \in \mathbf{Q}$  beliebig gewählt mit  $x < y$ .

Dann folgt für alle  $n \in \mathbf{N}$ , dass

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$$

ist, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$$

und damit, dass

$$e^x < e^y$$

ist.

Dieter Rüthing, Paderborn (BRD)

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] C. BLATTER, *Analysis I*. Springer-Verlag, Berlin 1974.  
 [2] K. PRACHAR, *Über einige einfache Folgen und Reihen im Schulunterricht*. *El. Math.* 30, 36–39 (1975).

## Aufgaben

**Aufgabe 753.**  $M$  sei eine Menge, und  $E(M)$  sei die Menge aller endlichen Teilmengen von  $M$ . Ferner sei  $K$  ein Körper, und  $R$  sei die Menge aller Abbildungen von  $E(M)$  in  $K$ . Definiert man für  $f, g \in R$  die Summe  $f+g$  durch  $(f+g)(X) = f(X) + g(X)$  für alle  $X \in E(M)$  und das Produkt  $fg$  durch  $(fg)(X) = \sum_{Y \subset X} f(Y)g(X \setminus Y)$  für alle  $X \in E(M)$ , so ist  $R(+, \cdot)$  ein Ring mit 1. Dabei ist die Eins die durch  $e(\emptyset) = 1$  und  $e(X) = 0$  für  $X \neq \emptyset$  definierte Abbildung  $e$ . Man rechnet leicht nach, dass die Menge  $I$  aller  $f \in R$ , für die  $f(\emptyset) = 0$  ist, ein Ideal von  $R$  ist. Zeige: Ist  $I = Rf_1 + \cdots + Rf_n$  mit  $f_i \in I$ , so ist  $M$  endlich, und es gilt  $|M| \leq n$ . Insbesondere folgt also, dass  $I$  nicht endlich erzeugt ist, wenn  $M$  unendlich ist.

H. Lüneburg, Kaiserslautern, Bundesrepublik Deutschland

*Lösung des Aufgabenstellers.* Es sei  $f \in I$ . Es gibt dann  $r_1, \dots, r_n \in R$  mit  $f = \sum_{i=1}^n r_i f_i$ . Daher ist

$$f(\{a\}) = \sum_{i=1}^n \sum_{Y \subset \{a\}} r_i(Y) f_i(\{a\} \setminus Y) = \sum_{i=1}^n r_i(\emptyset) f_i(\{a\}).$$

Bezeichnet man mit  $f^*$  die Einschränkung von  $f \in I$  auf  $\{\{a\} \mid a \in M\}$ , so ist also  $f^* \in Kf_1^* + \cdots + Kf_n^*$ , so dass der Vektorraum  $\{f^* \mid f \in I\}$  endlich erzeugt ist. Definiert man für  $a \in M$  die Abbildung  $f_a$  durch  $f_a(\{a\}) = 1$  und  $f_a(X) = 0$  für  $X \neq \{a\}$ , so folgt einmal  $f_a \in I$  und zum andern, dass die Menge der  $f_a^*$  linear unabhängig ist. Also ist