

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 31 (1976)  
**Heft:** 5

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Entscheidend ist nun aber, dass das Postulat der Eindeutigkeit der Verbindungsebene gestrichen werden kann, wenn (neben dem Erheben der erwähnten schwachen Identitätsforderung) verlangt wird, dass auf einer Geraden wenigstens drei Punkte liegen. Dann kann nämlich mit Hilfe des Eindeutigkeitssteils des Parallelenaxioms gezeigt werden, dass jeder Punkt einer Ebene mit zwei Punkten eines festen, in ihr liegenden Geradendreiecks kollinear ist. Das bedeutet aber, dass er mit jeder durch das Dreieck gehenden Ebene inzidiert.

Es sei noch bemerkt, dass wenn die in [2] vorgeschlagene Variante des Parallelenaxioms benutzt wird, das Postulat der Eindeutigkeit der Verbindungsebene auch dann überflüssig ist, wenn man auf die Voraussetzung kollinearer Punktetripel verzichtet.

D. Ruoff und J. Shilleto, University of Regina, Regina, Canada

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, 10. Aufl., Tübingen (1968).  
 [2] D. RUOFF und J. SHILLETO, *Das Parallelenaxiom im affinen Raum*, *El. Math.* 31. 9–12 (1976).

## Aufgaben

**Aufgabe 749.** Für ein ebenes Dreieck bezeichnen  $r$  den Inkreisradius,  $F$  den Mittelpunkt des Feuerbach-Kreises,  $G$  den Schwerpunkt,  $H$  den Höhenschnittpunkt und  $I$  den Inkreismittelpunkt. Man beweise  $\overline{IF} : (\overline{IG} \cdot \overline{IH}) \leq 3:4r$  mit Gleichheit genau für gleichschenklige Dreiecke. I. Paasche, München, BRD

*Lösung:* Bekanntlich liegen die Punkte  $H, F, G$  auf der Eulerschen Geraden des Dreiecks so, dass gilt:

$$\overline{HG} = 4\overline{FG} = 4\overline{HF}/3 \quad (1)$$

Die drei Ptolemäischen Ungleichungen (Vgl. z. B. *El. Math.* 30 (1975) S. 133) für die vier Punkte  $I, H, F, G$  liefern mit (1):

$$4\overline{IF} \leq 3\overline{IG} + \overline{IH}; \quad 3\overline{IG} \leq 4\overline{IF} + \overline{IH}; \quad \overline{IH} \leq 4\overline{IF} + 3\overline{IG} \quad (2.1,2,3)$$

mit Gleichheit für  $I, H, F, G$  auf einem Kreis oder auf einer Geraden. Da  $H, F, G$  stets auf einer Geraden liegen, gilt das Gleichheitszeichen dann, wenn auch  $I$  sich auf dieser Geraden befindet, d. h., für gleichschenklige Dreiecke. Weiter ist bekannt, dass der Inkreis und der Feuerbach-Kreis eines Dreiecks einander berühren, d. h.

$$\left. \begin{aligned} \overline{IF} &= R/2 - r \\ 9\overline{IG}^2 &= s^2 + 5r^2 - 16Rr \\ \overline{IH}^2 &= 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - s^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Aus (2.2) folgt, dass  $3\overline{IG}$ ,  $4\overline{IF}$ ,  $\overline{IH}$  Seitenlängen eines Dreiecks sind, also  $|3\overline{IG} - \overline{IH}| \leq 4\overline{IF}$ , d. h.  $(3\overline{IG} - \overline{IH})^2 \leq (4\overline{IF})^2$  oder mit (3)  $4R^2 - 12Rr + 8r^2 - 6\overline{IG} \cdot \overline{IH} \leq (2R - 4r)^2$ , also schliesslich  $4r \cdot \overline{IF} = 4r \left(\frac{R}{2} - r\right) \leq 3\overline{IG} \cdot \overline{IH}$ , was zu beweisen war.

G. Bercea, München, BRD

Weitere Lösungen sandten G. Bercea (München, BRD; zweite Lösung), P. Bundschuh (Köln, BRD), J.T. Groenman (Groningen, Niederlande), K. Grün (Linz, Österreich), J. Quoniam (St-Etienne, France) und M. Vowe (Therwil BL).

**Aufgabe 750.** Sechs verschiedene Punkte (Knoten) der euklidischen Ebene werden paarweise durch einfache, sich nicht selbst überschneidende Kurvenbögen (Kanten) derart verbunden, dass je zwei Kanten höchstens einen Punkt (Schnittpunkt oder Knoten) gemeinsam haben. Wie gross ist die Maximalzahl von Schnittpunkten, in denen sich mehr als zwei Kanten schneiden?

H. Harborth, Braunschweig, BRD

*Lösung des Aufgabenstellers:* Höchstens drei Kanten können sich in einem Punkt schneiden, da sonst zwei Kanten mit gemeinsamem Knoten sich in diesem Punkt kreuzen würden.  $S_1$  sei ein (sicher existierender) dreifacher Schnittpunkt. Die durch  $S_1$  bestimmten Knoten seien zyklisch mit den Nummern 1 bis 6 versehen (Fig. 1). Es gibt dann die drei Typen von Kanten, bei denen die Nummern modulo 6 die Betragsdifferenz 1, 2 oder 3 haben. Falls ein weiterer dreifacher Schnittpunkt  $S_2$  existiert, so kann durch zyklische Vertauschung der Nummern erreicht werden, dass  $S_2$  auf den Kanten (12) oder (13) liegt.

Auf (12) müssten sich (a) (34) und (56), (b) (35) und (46) oder (c) (36) und (45) in  $S_2$  schneiden. Entsprechend ergeben sich auf (13) die Fälle (d) (24) und (56), (e) (25) und (46) oder (f) (26) und (45).

Vier Knoten bestimmen höchstens einen Schnittpunkt. Da sich (14) und (25) bzw. (14) und (36) in  $S_1$  schneiden, können sich (12) und (45) bzw. (13) und (46) nicht schneiden, so dass (c) bzw. (e) nicht möglich sind. Durch Addition von 2 bzw. 3 (mod 6) zu den Knotennummern sind die Fälle (d) bzw. (f) als (b) gleich erkennbar.

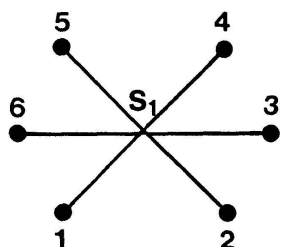


Fig.1

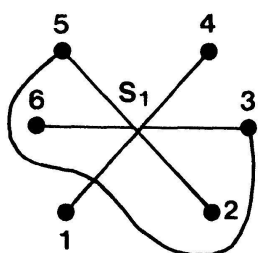


Fig.2

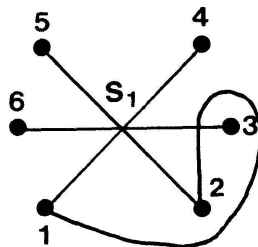


Fig.3

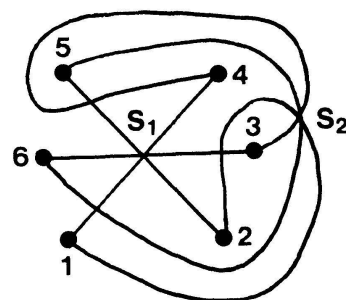


Fig.4

Die Kante (12) kann nur so wie in Fig.2 bzw. Fig.3 verlaufen, wenn die Symmetrie berücksichtigt wird. (35) kann (12) nur wie in Fig.2 schneiden, dann kann (46) aber nicht mehr durch  $S_2$  verlaufen. In Fig.3 kann (46) entweder (12) gar nicht oder mindestens in zwei Punkten schneiden, so dass insgesamt auch (b) nicht möglich ist.

Verläuft im Fall (a) die Kante (12) wie in Fig.2, so können (34) und (56) nur dann (12) schneiden, wenn sie entsprechend (12) in Fig.3 verlaufen. Dann fallen die Schnittpunkte aber allenfalls als Berührungspunkte von (34) und (56) zusammen. Aus Symmetriegründen (Addition von 2 bzw. 4 (mod 6) zu den Knotennummern) können auch (34) und (56) nicht entsprechend (12) in Fig.2 verlaufen. Daher müssen sich etwa (12) und (34) wie in Fig.4 in  $S_2$  schneiden. Dann gibt es nur eine Möglichkeit (Fig.4), dass auch (56) den Punkt  $S_2$  schneidet. Damit hat sich ein zweiter dreifacher Schnittpunkt ergeben, denn die fehlenden Kanten lassen sich in erlaubter Weise einzeichnen (Fig.5). Da diese Kanten aber auch nicht anders als in Fig.5 verlaufen können, kann es keinen dritten dreifachen Schnittpunkt geben. Die gesuchte Anzahl ist also Zwei.

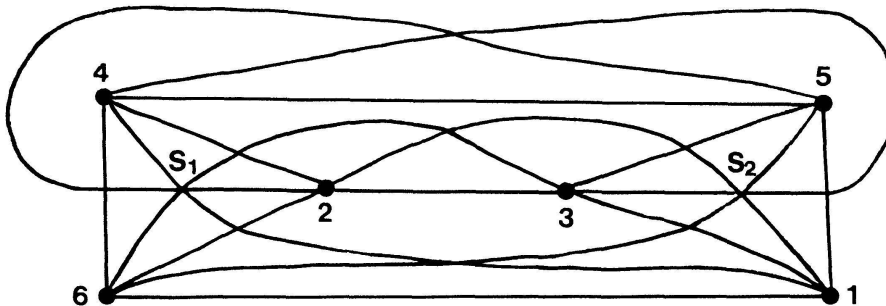


Fig.5

Weitere Lösungen sandten L. Kuipers (Mollens VS) und H. Warncke (Porto Alegre, Brasilien).

**Aufgabe 751.** Für jede natürliche Zahl  $n$  bestimme man alle Folgen  $a_1, \dots, a_n$  nichtnegativer ganzer Zahlen mit der Eigenschaft, dass für  $k=1, \dots, n$  das Folgenglied  $a_k$  die Anzahl der Elemente der Menge  $\{i \in \{1, \dots, n\} \mid a_i = k-1\}$  ist.

P. Hohler, Olten

*Lösung:*  $b_i := a_{i+1}$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ) gibt an, wie oft  $i$  in der Folge auftritt. Da die Folge  $n$  Glieder hat, gilt

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_i = n. \quad (1)$$

$n$  ist somit auch die Summe aller Folgenglieder; diese lässt sich aber auch durch

$$\sum_{i=1}^{n-1} i b_i = n \quad (2)$$

ausdrücken. Aus (1) und (2) erhalten wir durch Subtraktion



$$b_0 = b_2 + 2b_3 + 3b_4 + \cdots + (j-1)b_j + \cdots + (n-2)b_{n-1}. \quad (3)$$

$b_0 = 0$  ist nach Definition widersprüchlich.

$b_0 = 1$ : Aus (3) folgt  $b_2 = 1$ ,  $b_j = 0$  für  $j \geq 3$ ; somit wird  $b_1 = 2$ ,  $b_3 = 0$ ,  $n = 4$ ; die Folge lautet  $(1, 2, 1, 0)$ .

$b_0 = 2$ : Jetzt ist  $b_2 \geq 1$  und wegen (3)  $b_2 = 2$  und  $b_j = 0$  für  $j \geq 3$ . Dies ergibt die zwei Möglichkeiten  $b_1 = 0$ ,  $n = 4$  und  $b_1 = 1$ ,  $n = 5$ , also die Folgen  $(2, 0, 2, 0)$  und  $(2, 1, 2, 0, 0)$ .

$b_0 = j$ ,  $j \geq 3$ : Aus (3) folgt jetzt  $b_j = 1$ ,  $b_2 = 1$  und  $b_k = 0$  für  $k \geq 3$ ,  $k \neq j$ . Somit werden  $b_1 = 2$  und  $n = j + 4 \geq 7$ . Dies liefert der Reihe nach die Folgen  $(3, 2, 1, 1, 0, 0, 0)$ ,  $(4, 2, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(n-4, 2, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, 0)$ ,  $\dots$

J. Binz, Bolligen BE

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH), J. Fehér (Pécs, Ungarn), H. Harborth (Braunschweig, BRD), O.P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), I. Paasche (München, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil ZH), E. Umberger (University Park, Pa., USA) und M. Vowe (Therwil BL).

**Aufgabe 752.** Die reellwertige Funktion  $f$  sei auf der ganzen reellen Zahlengeraden definiert und differenzierbar, und die Ableitung  $f'$  von  $f$  sei bei 0 unstetig. Was lässt sich über Existenz und Endlichkeit der beiden einseitigen Grenzwerte von  $f'$  bei 0 sagen?

R. Rose, Biel

*Solution:* We shall make use of the following two well known facts.

(A) Let  $f$  be a continuous function and let  $f$  be differentiable in  $x = 0$ . Then if  $\lim_{x \downarrow 0} f'(x)$  exists, it equals  $f'(0)$  and similarly for  $\lim_{x \uparrow 0} f'(x)$ .

(B) Let  $f$  be differentiable on an interval  $[a, b]$ . Let  $a < x_1 < x_2 < b$ . Let  $\min(f'(x_1), f'(x_2)) < y^* < \max(f'(x_1), f'(x_2))$ . Then there exists a point  $x^*$ ,  $x_1 < x^* < x_2$ , such that  $f'(x^*) = y^*$ .

From (A) it is clear that existence of  $\lim_{x \downarrow 0} f'(x)$  and  $\lim_{x \uparrow 0} f'(x)$  would contradict

the discontinuity of  $f'$  in 0. The existence of one of two limits is possible, as follows from the example

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

About the finiteness of  $\lim_{x \downarrow 0} f'(x)$  and  $\lim_{x \uparrow 0} f'(x)$ , we can remark that the

possibility of  $\lim_{x \downarrow 0} f'(x) = \infty$  (or  $-\infty$ ), and similarly for  $\lim_{x \uparrow 0} f'(x)$ , can be excluded

by (B), since this would contradict the existence of  $f'$  in  $x = 0$ . However it is possible that  $\limsup_{x \downarrow 0} f'(x) = \infty$  and  $\liminf_{x \downarrow 0} f'(x) = -\infty$  (or similarly for  $x \uparrow 0$ ), as follows from

the example:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

$$\left( \text{now } f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \text{ for } x > 0 \right).$$

O. P. Lossers, Eindhoven, The Netherlands

Weitere Lösungen sandten J. Fehér (Pécs, Ungarn), L. Kuipers (Mollens VS) und Problemgruppe Bern.

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis 10. April 1977 an **Dr. H. Kappus**. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit Problem ... A, B bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, p. 67), Problem 625 B (Band 25, p. 68), Problem 645 A (Band 26, p. 46), Problem 672 A (Band 27, p. 68), Aufgabe 680 (Band 27, p. 116), Problem 724 A (Band 30, p. 91), Problem 764 A (Band 31, p. 44).

**Aufgabe 773.** Call a positive prime ideal, if primality is retained under iteration as often as desired of the operations of permuting digits, adding digits and multiplying digits. Determine all ideal primes (in base 10).

P. H. Doyle, East Lansing, Michigan, USA

**Aufgabe 774.** In der Ebene der drei nicht kollinearen Punkte  $F_1, F_2, F_3$  konstruiere man einen Punkt  $P$  so, dass die drei Ellipsen, deren Brennpunkte resp.  $F_1$  und  $F_2$ ,  $F_2$  und  $F_3$ ,  $F_3$  und  $F_1$  sind, und die durch  $P$  gehen, einander ähnlich sind. Man zeige, dass die Lösungen stets reell sind.

C. Bindschedler, Küsnacht

**Aufgabe 775.** Man zeige, dass ein  $n$ -Simplex ( $n \geq 3$ ) genau dann einen Höhenschnittpunkt hat, wenn je zwei disjunkte Kanten orthogonal sind. (Vergl. dazu R. Fritsch, «Höhenschnittpunkte» für  $n$ -Simplexes, *El. Math.* 31, 1–8, 1976).

R. Fritsch, Konstanz, BRD

**Aufgabe 776.** Es seien  $p_1, \dots, p_n$  ( $n \geq 2$ ) nichtnegative reelle Zahlen mit  $p_1 + \dots + p_n = 1$ . Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \leq f\left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i}\right)$$

mit Gleichheit genau für  $x_1 = \dots = x_n$ , jeweils unter folgenden Voraussetzungen:

1)  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  ist differenzierbar,  $g: x \mapsto x f'(x)$ ,  $x \in (0, 1)$  ist streng monoton abnehmend,  $x_i \in [0, 1]$  für  $i = 1, \dots, n$ .

2)  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  ist konkav und streng monoton abnehmend,  $x_i \geq 0$  für  $i = 1, \dots, n$ .

H. Kappus, Rodersdorf SO

## Literaturüberschau

*Kreative Lehrer – Kreative Schüler.* Von G. HEINELT. 160 Seiten. DM 8,90. Herderbücherei, Fachserie Pädagogik Nr. 9018. Herder, Freiburg i. Br. 1974.

Neben dem Begriff der Kreativität ist es dem Autor ein Anliegen, die Entwicklung und die Diagnostik der Kreativität darzustellen. Was das Buch von anderen unterscheidet ist die Bezogenheit zum Unterricht. Hier wird eine kreative Persönlichkeit vorausgesetzt, die unter ganz bestimmten Bedingungen heranwachsen kann (Freiheit von Egoismen, Freiheit von Konflikten, Freiheit von Stress usw.), wobei eine Übertragung auf (künftige kreative) Schüler deutlich wird. Inwiefern gar in der Gruppe Kreativität entwickelt werden kann, hängt u.a. vom Führungsstil ab. Alles in allem handelt es sich um eine knappe, übersichtliche und gut fundierte Darstellung der Kreativitätsproblematik, die dem praktizierenden Lehrer viele Einsichten und Anregungen vermittelt.

H. FISCHER

*Numerische Behandlung von Eigenwertaufgaben.* Herausgegeben von L. COLLATZ und K.P. HADELER. Tagungsbericht. 142 Seiten. Fr. 35.-. Birkhäuser, Basel 1974.

Das vorliegende Buch enthält die Vorträge, die zu diesem Thema anlässlich einer Tagung unter demselben Titel in Oberwolfach vom 19. bis 24. November 1972 gegeben wurden. Der recht heterogene Band enthält Vorträge zur Matrizennumerik, zur Berechnung der Lösungen kontinuierlicher Probleme sowie einige weitere recht speziell ausgerichtete Beiträge.

U. KIRCHGRABER

*Theorie und Praxis der Booleschen Algebra.* Von M. DENIS-PAPIN, R. FAURE, A. KAUFMANN und Y. MALGRANGE. Übersetzung aus dem Französischen, besorgt von U. Schulte und F. Cap. 378 Seiten mit 129 Abbildungen. DM 48,-. Reihe *Logik und Grundlagen der Mathematik*, Bd. 15. Verlag Vieweg, Braunschweig 1974.

Durch Übersetzen und Zusammenlegen zweier bereits nicht sehr überzeugender Bücher (Denis-Papin, Faure, Kaufmann: *Cours de Calcul booléien appliqué*; Denis-Papin, Malgrange: *Exercices de Calcul booléien avec leurs solutions*) hat der Vieweg-Verlag ein eher ärgerliches Buch herausgebracht. Es handelt sich um eine weitausholende elementare Einführung in die Boolesche Algebra, die wegen eines Zuviels an Stoff die Zusammenhänge nur schwer erkennen lässt. Eine gewisse Weitschweifigkeit lag schon den beiden französischen Originalwerken zugrunde; diese hat sich nun aber durch das Zusammenlegen noch erheblich potenziert. Eine schlecht koordinierte Übersetzung hat das ihre dazu beigetragen, dass in der deutschen Version die Zusammenhänge zusätzlich verbaut sind. Überhaupt hat sich sehr ungünstig ausgewirkt, dass zwei verschiedene Übersetzer an der Arbeit waren. So hat der Übersetzer des 1. Teils das französische *treillis* mit Gitter übersetzt, während der Bearbeiter des 2. Teils das richtige Wort Verband verwendet hat. Im Sachregister findet der Leser Gitter und Verband aufgeführt, dies ohne jeden Hinweis, dass beides dasselbe ist. Neckischerweise wird er auf verschiedene Seiten des Buches verwiesen, je nachdem, ob er unter Gitter oder Verband nachschlägt. Es liessen sich leicht weitere derartige Unzulänglichkeiten anführen.

Dass dem Buch kein klares logisches Konzept zugrunde liegt, geht auf das französische Autorenteam zurück. Offenbar hat jeder Mitarbeiter unabhängig von den andern seine Kapitel geschrieben. Die Grundgesetze der Mengenalgebra werden zum Beispiel im Einführungskapitel frischfröhlich an Venn-