

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 32 (1977)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Untersuchungen zu einem hyperoskulierenden Büschel von Kegelschnitten. II Teil  
**Autor:** Schröder, Eberhard  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32147>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Minustyp sind. Aus der im vorhergehenden Abschnitt 5 gewonnenen Übersicht über die arithmetische Natur der Lösungspaare vom Plustyp ist hiermit auch eine solche für die begleitenden Lösungspaare vom Minustyp gewonnen. *Auch in ihnen treten nur alle ungeraden natürlichen Zahlen ausser 1 und alle natürlichen Vielfachen von 8 auf.*

Die damit gewonnene Übersicht über die Lösungen der zugrundegelegten diophantischen Gleichung (1) kann auch auf mannigfache Weise durch elementararithmetische Betrachtungen innerhalb des rationalen Zahlkörpers gewonnen werden. Doch scheint mir, wie schon gesagt, die hier durchgeführte Heranziehung der eindeutigen Primzerlegung im Körper der sechsten Einheitswurzeln interessanter und eleganter.

Helmut Hasse, Hamburg

## Untersuchungen zu einem hyperoskulierenden Büschel von Kegelschnitten

### II. Teil

Als zweiter Zugang zu einem hyperoskulierenden Büschel von Kegelschnitten soll hier eine in der ebenen Kinematik auftretende birationale quadratische Transformation verwendet werden<sup>1)</sup>.

Der erste Momentanpol  $P_1$  eines ebenen Zwangslaufes liege im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Die Polbahntangente falle mit der  $x$ -Achse zusammen, und der zweite, auf der  $y$ -Achse liegende Momentanpol  $P_2$  – auch Wendepol genannt – habe die Koordinaten  $P_2(0, -2\rho)$ . Dann lautet die Gleichung des Wendekreises  $w$  im Bezugsmoment der Bewegung

$$x^2 + y^2 + 2\rho y = 0. \quad (1)$$

Alle von  $P_1$  verschiedenen Punkte der Gangebene  $\Gamma$ , die sich mit dem Wendekreis decken, und nur diese, durchlaufen im Augenblick der Bewegung Wendepunkte ihrer Bahnkurve. Ein beliebiger Punkt  $X(x, y)$  ist mit dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{X}(\xi, \eta)$  durch eine birationale quadratische Verwandtschaft  $T$  verknüpft. Die Transformationsformeln für  $T$  lauten bezüglich des vorgegebenen Koordinatensystems

$$\xi = \frac{2\rho xy}{x^2 + y^2 + 2\rho y}, \quad \eta = \frac{2\rho y^2}{x^2 + y^2 + 2\rho y}. \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Im ersten Teil dieses Beitrages wurde eine von K.H. Schellbach eingeführte Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte zur Untersuchung eines hyperoskulierenden Kegelschnittbüschels ausgewertet [5].

Entsprechend gilt für die Umkehrtransformation  $T^{-1}$

$$x = -\frac{2\rho\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2 - 2\rho\eta}, \quad y = -\frac{2\rho\eta^2}{\xi^2 + \eta^2 - 2\rho\eta}. \quad (3)$$

Unterwirft man eine nicht durch  $P_1$  gehende Gerade  $g$  der Transformation  $T$ , ergibt sich ein nicht zerfallender Kegelschnitt  $\kappa$ . Dieser oskuliert den an der Polbahntangente gespiegelten Wendekreis – aus kinematischer Sicht als Rückkehrkreis  $r$  bezeichnet – in  $P_1$ . Die Bilder aller nicht durch  $P_1$  gehenden Geraden ergeben somit ein Netz von Kegelschnitten. Diese haben den Rückkehrkreis  $r$  in  $P_1$  als gemeinsamen Krümmungskreis. Die drei Hauptpunkte dieses Feldes sind daher in  $P_1$  zusammengerückt und spannen dort ein Linienelement zweiter Ordnung von  $r$  auf. Die Polbahntangente ist die dreifach zu zählende Hauptgerade in beiden Feldern. Das Bild einer durch  $P_1$  gehenden Geraden zerfällt in zwei Geraden, nämlich die Gerade selbst und die Polbahntangente. Die Gesamtheit der Bildkegelschnitte stellt ein homaloides Netz dar. Eine nicht durch  $P_1$  gehende Gerade  $g$  bildet sich auf eine

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hyperbel} \\ \text{Parabel} \\ \text{Ellipse} \end{array} \right\}$  ab, je nachdem die Schnittpunktkoordinaten von  $g$  mit  $w$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{getrennt reell} \\ \text{zusammenfallend} \\ \text{konjugiert komplex} \end{array} \right\}$  sind.

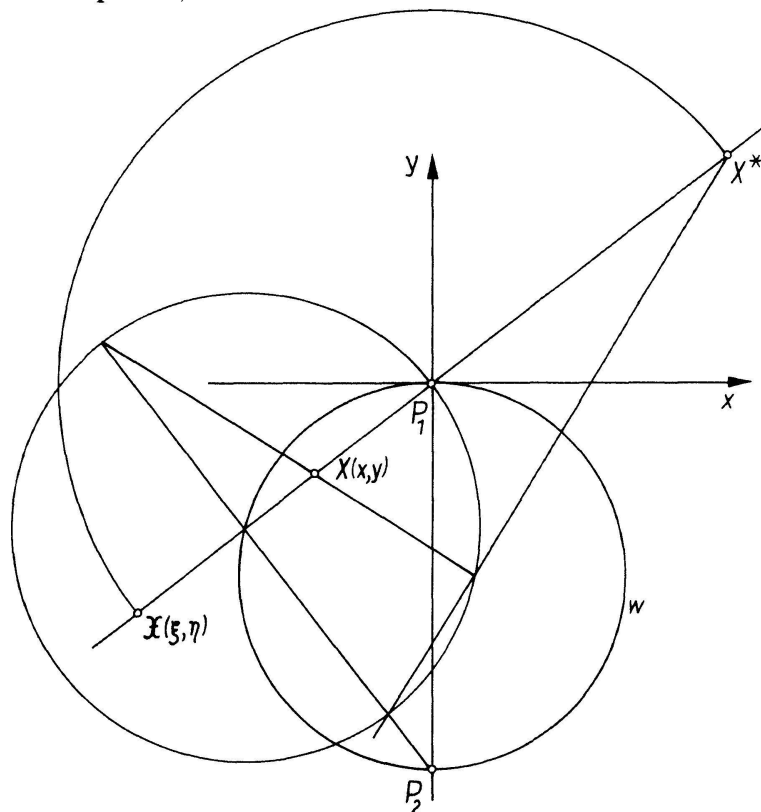


Abb. 1

Abbildung 1 zeigt, wie die Transformation  $T$  konstruktiv zu realisieren ist. Auf einem Polstrahl bilden die Punktmengen  $\{X\}$  und  $\{\mathfrak{X}\}$  zwei gleichlaufende projektive Punktreihen, deren Fixpunkte in  $P_1$  zusammenfallen. Ihre Gegenpunkte liegen in den von  $P_1$  verschiedenen Schnittpunkten des Polstrahles mit  $w$  bzw.  $r$ . Den Punkten der Polbahntangente entspricht der erste Momentanpol [1], [2], [3].

Nach diesen Vorbetrachtungen sollen die Geraden eines Büschels  $\{g\}$  der Transformation  $T$  unterworfen werden, wobei der Träger  $C$  des Büschels ein von  $P_1$  verschiedener Punkt der Polbahntangente ( $x$ -Achse) ist. Mit  $C(-c, 0)$ ,  $c > 0$ , und dem Achsenabschnitt  $v$  auf der  $y$ -Achse als Büschelparameter ergibt sich für  $\{g\}$

$$vx - cy + vc = 0 \quad \text{mit} \quad (-\infty < v < \infty). \quad (4)$$

Die Anwendung von (3) auf (4) führt für  $v \neq 0$  auf die Gleichung eines nicht-zerfallenden Kegelschnittes. Diese werde wieder auf das  $xy$ -System bezogen.

$$vcx^2 - 2\rho vxy + (2\rho + v)cy^2 - 2\rho vcy = 0. \quad (5)$$

In dem nicht auszuschliessenden Fall  $1/v = 0$  gilt die Gleichung

$$cx^2 - 2\rho xy + cy^2 - 2\rho cy = 0. \quad (5')$$

Für den Durchmesser  $d$  eines Kegelschnittes aus  $\{\kappa\}$  resultiert nach (5)

$$y = \frac{c}{\rho}x. \quad (6)$$

Da in (6)  $v$  nicht enthalten ist, haben die Bildkegelschnitte von  $\{g\}$  bezüglich  $P_1$  neben  $r$  als gemeinsamen Krümmungskreis zusätzlich  $d$  als gemeinsamen Durchmesser. Das Geradenbüschel  $\{g\}$  wird durch die Transformation  $T$  in ein hyperoskulierendes Büschel von Kegelschnitten übergeführt. Dabei ist  $d$  die Polare von  $C$  bezüglich des Wendekreises  $w$ .

Wie in [5] gezeigt wurde, umhüllen die Achsen der Kegelschnitte eines hyperoskulierenden Büschels eine Parabel  $\pi_h$ . Ihre Gleichung lautet nach [5], Formel 2, im vorliegenden Fall unter Beachtung von  $m = c/\rho$

$$(\rho x + cy)^2 + \rho c(2\rho x - 2cy + \rho c) = 0. \quad (7)$$

Aus Gleichung (7) lassen sich einige geometrische Lagebeziehungen von  $\pi_h$  ablesen, die in die Sprechweise der ebenen Kinematik übertragen werden sollen.

Das dem Geradenbüschel  $\{g\}$  mittels  $T$  zugeordnete Kegelschnittbüschel  $\{\kappa\}$  besitzt eine Achsenhüllparabel  $\pi_h$ , die die Polbahntangente im Träger  $C$  von  $\{g\}$  und die Polbahnnormale im Mittelpunkt  $K$  des Rückkehrkreises  $r$  berührt.  $C$ ,  $K$  und der Brennpunkt  $F_h$  liegen auf der Polaren von  $P_1$  bezüglich  $\pi_h$ . Die Polare  $d$  von  $C$  bezüglich des Wendekreises  $w$  ist die Leitgerade von  $\pi_h$ . Die Parallele  $g_a$  zu  $g$  durch  $P_1$  schneidet den Rückkehrkreis ausser in  $P_1$  im Bild des Fernpunktes von  $g$ , also in dem einfach zu zählenden Schnittpunkt  $G = (r\kappa)$ .

Dieser kinematische Zugang eröffnet auch eine Konstruktionsmöglichkeit für die Asymptoten der Hyperbeln aus  $\{\kappa\}$ . Eine den Wendekreis  $w$  in den nicht zusammenfallenden Punkten  $W_1$  und  $W_2$  schneidende Gerade aus  $\{g\}$  geht mittels der Transformation  $T$  in eine Hyperbel über. Die Asymptoten dieser Hyperbel sind die Parallelen zu  $(P_1W_1)$  bzw.  $(P_1W_2)$  durch  $M$ . Dabei ist  $M$  Halbierungspunkt der Strecke  $\overline{P_1\bar{x}}$ . Für die Achsen von  $\kappa$  bietet sich ein zweifacher Zugang, nämlich als Tangenten aus  $M$  an die Hüllparabel  $\pi_h$  oder als Winkelhalbierende der Asymptoten an (vgl. Abb. 2).

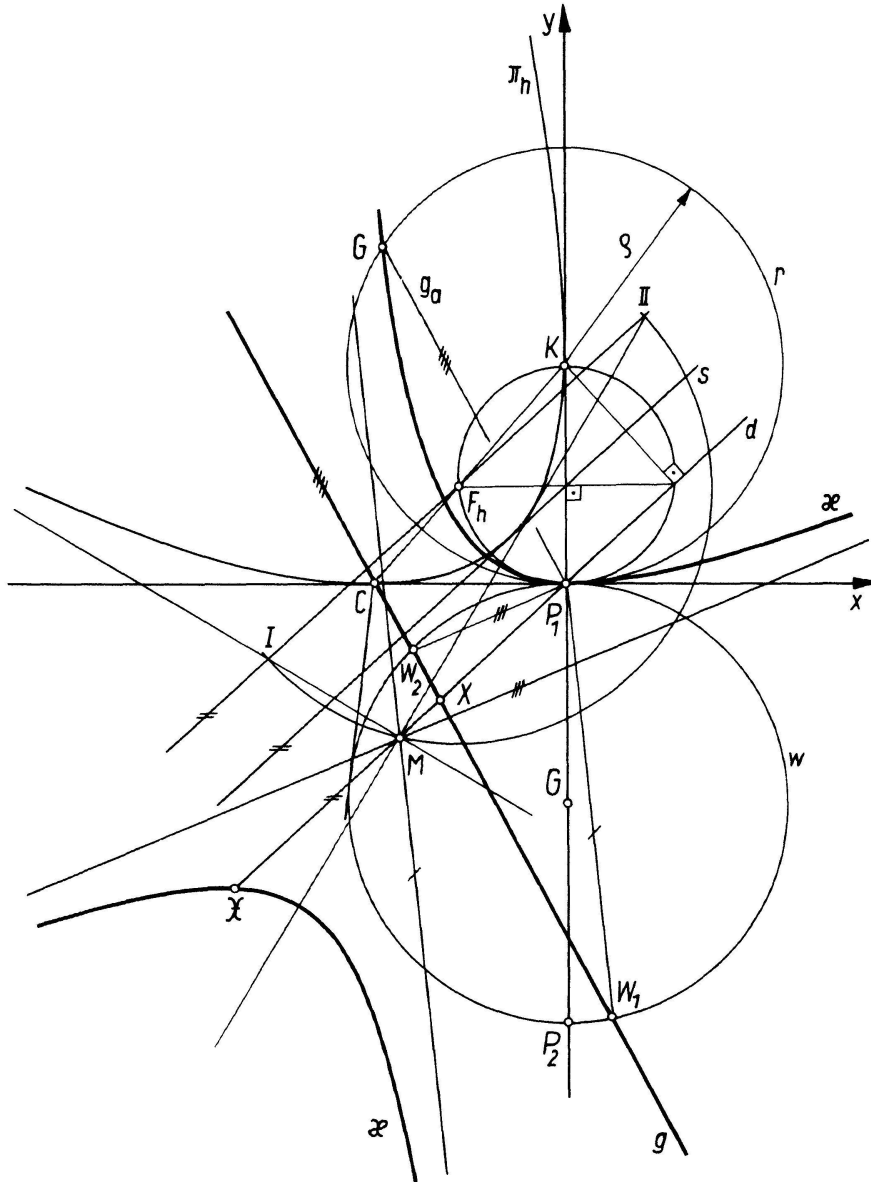


Abb. 2

In diesem Zusammenhang ist noch ein dritter Zugang zu dem hyperoskulierenden Kegelschnittbüschel  $\{\kappa\}$  von Interesse. Der aus einer Geraden  $g$  durch die Transformation  $T$  erzeugte Bildkegelschnitt  $\kappa$  ist auch als zentrisch-kollineares Bild des Rückkehrkreises  $r$  (Krümmungskreis von  $\kappa$  in  $P_1$ ) erklärbar. Dabei ist  $P_1$  das Kollineationszentrum, die Parallele  $g_a$  zu  $g$  durch  $P_1$  die Kollineationsachse und  $g$  die Fluchtgerade. Durch Spiegelung von  $g$  an  $g_a$  erhält man die Verschwindungs-

gerade  $g_v$  dieser Kollineation. Damit sind alle Bestimmungsstücke bereitgestellt, um die Transformation  $r \rightarrow \kappa$  konstruktiv ausführen zu können [1], [4]. Zu dem Schnittpunkt  $H_v$  von  $d$  mit der Verschwindungsgeraden  $g_v$  sucht man die Polare  $h$  bezüglich  $r$  auf. Diese schneidet den Durchmesser  $d$  im Urbild  $M^*$  des Mittelpunktes  $M$  von  $\kappa$ .  $M$  liegt einerseits auf dem Kollineationsstrahl durch  $M^*$ , andererseits auf der Parallelen zur  $x$ -Achse durch den Punkt  $A = (g_a h)$ , da  $A$  bei der Kollineation in sich übergeht und  $C_v$  in den Fernpunkt der  $x$ -Achse transformiert wird. Der Brennpunkt  $F_h$  der Achsenhüllparabel  $\pi_h$  ergibt sich nach der in [5], Abb.2 und 3, abgeleiteten Konstruktion. Ferner schneidet der Kreis um  $F_h$  mit der Strecke  $\overline{MF_h}$  als Radius die Parallele zu  $d$  durch  $F_h$  in den Punkten  $I$  und  $II$ . Die Verbindungsgeraden  $(MI)$  und  $(MII)$  legen Haupt- und Nebenachse des Bildkegelschnittes  $\kappa$  fest. Die Längen der Achsen sind mittels der angedeuteten Nebenkonstruktion leicht auffindbar. Durchläuft  $g$  alle Geraden des Büschels  $\{g\}$ , so ergibt sich eine einparametrische Schar von zentrischen Kollineationen. Wendet man die Schar dieser Kollineationen auf den Rückkehrkreis  $r$  an, ergibt sich das gleiche Büschel  $\{\kappa\}$  sich paarweise hyperoskulierender Kegelschnitte. Der Kreis  $r$  gehört diesem Büschel nicht an (vgl. Abb.3).

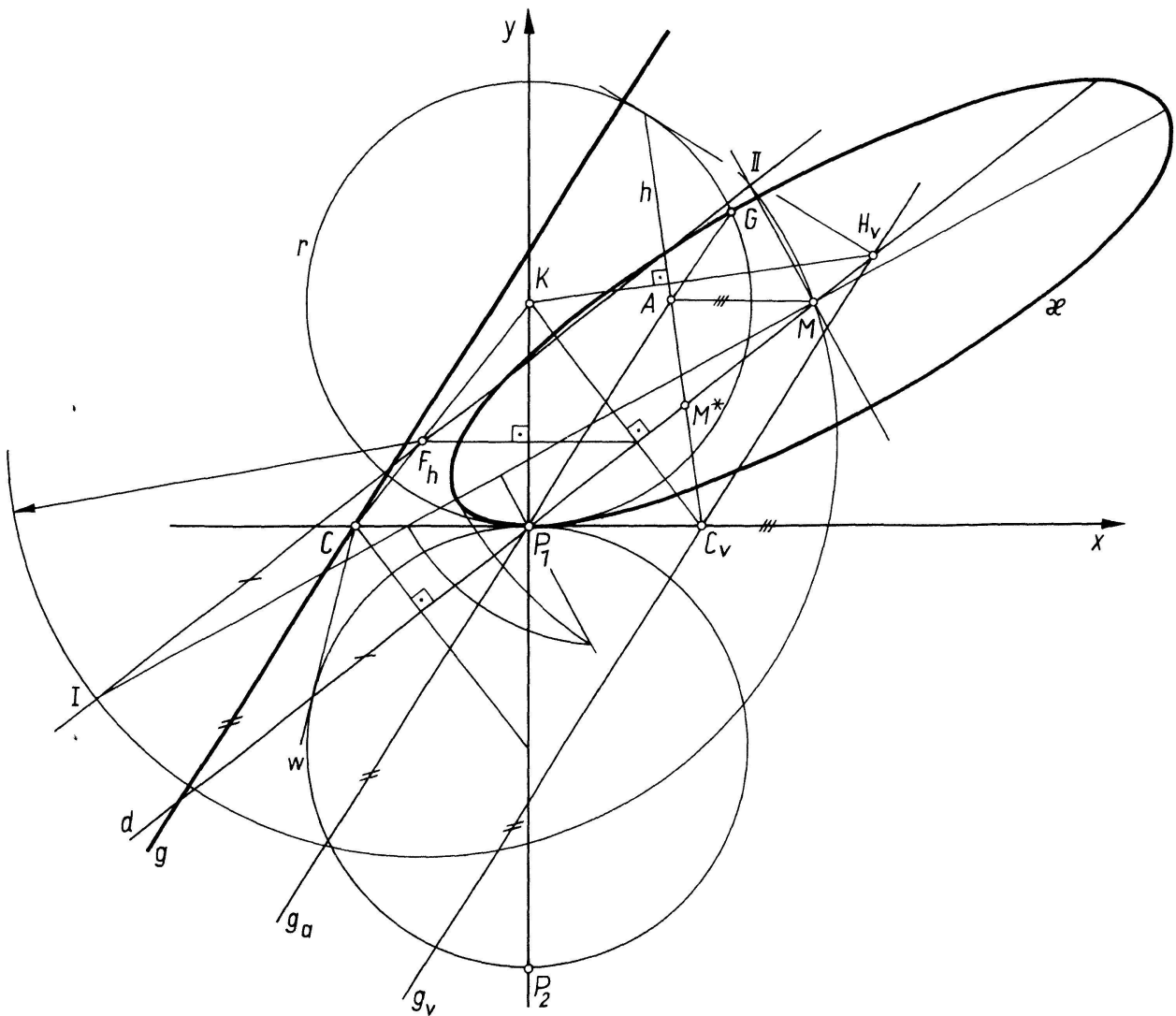


Abb.3

Ist  $C$  der Fernpunkt der  $x$ -Achse, so ist  $P_1$  der allen Kegelschnitten von  $\{\kappa\}$  gemeinsame Scheitelpunkt. Die Achsenhüllparabel zerfällt in die doppelt zu zählende Gerade mit der Gleichung  $y = \rho$ . In diesem Sonderfall gehört der Rückkehrkreis  $r$  dem hyperoskulierenden Kegelschnittbüschel an.

Eberhard Schröder, Technische Universität Dresden, DDR

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. BEREIS, *Über die Bahnkrümmungsmitten bei der Bewegung eines starren ebenen Systems*, Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden 11, Heft 4, 671–675 (1962).
- [2] W. BLASCHKE und H.R. MÜLLER, *Ebene Kinematik* (Verlag von R. Oldenbourg, München 1956), S.30–31.
- [3] L. BURMESTER, *Lehrbuch der Kinematik* (A. Felix, Leipzig 1888), S.117ff.
- [4] E. KRUPPA, *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie* (Springer-Verlag, Wien 1957), S.118.
- [5] E. SCHRÖDER, *Untersuchungen zu einem hyperoskulierenden Büschel von Kegelschnitten*, *El. Math.* 30, 49–56 (1975).

## Kleine Mitteilungen

### Eine Bemerkung zu einer Integralformel von Cauchy

1. Nach einer im dreidimensionalen euklidischen Raum von CAUCHY [1] 1841 gefundenen Beziehung lässt sich die Oberfläche eines konvexen Körpers als Integral über zweidimensionale Inhalte darstellen, die sich durch Normalprojektion des Eikörpers ergeben. Es gilt die Integralformel

$$F(A) = \frac{1}{\pi} \int f(A, u) du, \quad (1)$$

in der  $A$  einen konvexen Körper mit inneren Punkten,  $f(A, u)$  den Flächeninhalt des Normalrisses von  $A$  in Richtung  $u$  auf die Ebene  $E(u)$  bezeichnet;  $du$  bedeutet die Richtungsdichte, d. h. das Flächenelement der Einheitskugel, über die sich die Integration in (1) wie stets im folgenden erstreckt. Unter Verwendung von (1) kann  $F(A)$  nach oben abgeschätzt werden, indem man den Normalriss  $f(A, u)$  allgemeiner durch Parallelprojektion von  $A$  in Richtung  $u$  auf die Randfläche  $\dot{K}$  einer Kugel  $K$  ersetzt, für die  $A \subset K$  gilt. Es ergibt sich, dass in der aufzustellenden Ungleichung das Gleichheitszeichen genau dann eintritt, wenn  $A$  eine zu  $K$  konzentrische Kugel ist.

2. Zunächst zu diesem Spezialfall: Seien  $A$  und  $K$  konzentrische Kugeln mit den Radien  $r$  bzw.  $R \geq r$ ,  $F(A)$  bzw.  $F(K) = 4\pi R^2$  ihre Oberflächen, sowie  $f_K$  die Mantelfläche der Kugelhaube von  $K$  mit Grundkreisradius  $r$ . Dann gilt  $f_K = 2\pi R h = 2\pi R (R - \sqrt{R^2 - r^2})$  (Abb. 1). Mit  $f'_K := 2\pi R (R + \sqrt{R^2 - r^2}) = 4\pi R^2 - f_K$  ergibt sich aus (1):