Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 32 (1977)

Heft: 1

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Ist C der Fernpunkt der x-Achse, so ist P_1 der allen Kegelschnitten von $\{\kappa\}$ gemeinsame Scheitelpunkt. Die Achsenhüllparabel zerfällt in die doppelt zu zählende Gerade mit der Gleichung $y=p$. In diesem Sonderfall gehört der Rückkehrkreis r dem hyperoskulierenden Kegelschnittbüschel an.

Eberhard Schröder, Technische Universität Dresden, DDR

LITERATURVERZEICHNIS

[1] R. Bereis, *Über die Bahnkrümmungsmitten bei der Bewegung eines starren ebenen Systems*, Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden *11*, Heft 4, 671–675 (1962).

[2] W. Blaschke und H.R. Müller, *Ebene Kinematik* (Verlag von R. Oldenbourg, München 1956), S. 30–31.

[3] L. Burmester, *Lehrbuch der Kinematik* (A. Felix, Leipzig 1888), S. 117ff.

[4] E. Kruppa, *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie* (Springer-Verlag, Wien 1957), S. 118.

[5] E. Schröder, *Untersuchungen zu einem hyperoskulierenden Büschel von Kegelschnitten*, El. Math. *30*, 49–56 (1975).

Kleine Mitteilungen

Eine Bemerkung zu einer Integralformel von Cauchy

1. Nach einer im dreidimensionalen euklidischen Raum von Cauchy [1] 1841 gefundenen Beziehung lässt sich die Oberfläche eines konvexen Körpers als Integral über zweidimensionale Inhalte darstellen, die sich durch Normalprojektion des Eikörpers ergeben. Es gilt die Integralformel

$$F(A)=\frac{1}{\pi}\int f(A,u)\,du, \qquad (1)$$

in der A einen konvexen Körper mit inneren Punkten, $f(A,u)$ den Flächeninhalt des Normalrisses von A in Richtung u auf die Ebene $E(u)$ bezeichnet; du bedeutet die Richtungsdichte, d.h. das Flächenelement der Einheitskugel, über die sich die Integration in (1) wie stets im folgenden erstreckt. Unter Verwendung von (1) kann $F(A)$ nach oben abgeschätzt werden, indem man den Normalriss $f(A,u)$ allgemeiner durch Parallelprojektion von A in Richtung u auf die Randfläche $\dot{K}$ einer Kugel K ersetzt, für die $A\subset K$ gilt. Es ergibt sich, dass in der aufzustellenden Ungleichung das Gleichheitszeichen genau dann eintritt, wenn A eine zu K konzentrische Kugel ist.

2. Zunächst zu diesem Spezialfall: Seien A und K konzentrische Kugeln mit den Radien r bzw. $R\geqq r$, $F(A)$ bzw. $F(K)=4\pi R^2$ ihre Oberflächen, sowie f_K die Mantelfläche der Kugelhaube von K mit Grundkreisradius r. Dann gilt $f_K=2\pi Rh=2\pi R(R-\sqrt{R^2-r^2})$ (Abb. 1). Mit $f'_K:=2\pi R(R+\sqrt{R^2-r^2})=4\pi R^2-f_K$ ergibt sich aus (1):

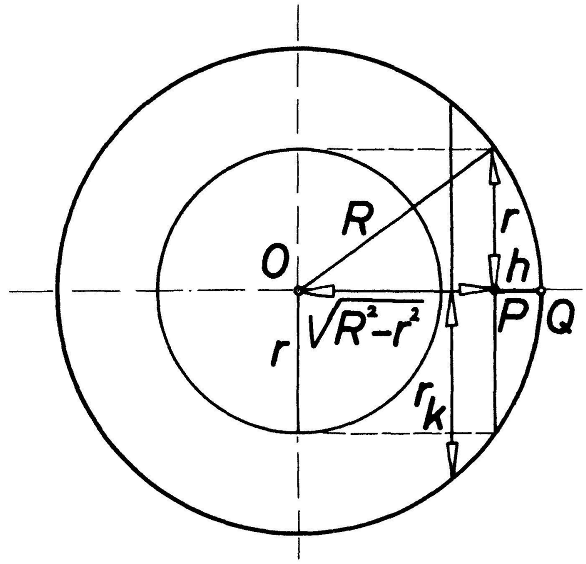

Abbildung 1

$$F(A)=\frac{1}{\pi}\int \pi r^2\,du=\int (R-\sqrt{R^2-r^2})\cdot(R+\sqrt{R^2-r^2})\,du$$
$$=\frac{1}{\pi F(K)}\int 2\pi R(R-\sqrt{R^2-r^2})\cdot 2\pi R(R+\sqrt{R^2-r^2})\,du,$$
$$F(A)\cdot F(K)=\frac{1}{\pi}\int f_K\cdot f_K'\,du=\frac{1}{\pi}\int f_K\cdot(F(K)-f_K)\,du$$
$$=\frac{1}{\pi}F(K)\int f_K\,du-\frac{1}{\pi}\int f_K^2\,du. \tag{2}$$

Da f_K in (2) nicht von u abhängt, kann die Integration über die Einheitskugel unmittelbar durchgeführt werden. Die geometrische Deutung von (2) besteht in folgendem: Die Oberfläche $F(A)$ ist bestimmt durch die Oberfläche $F(K)$ und durch den Inhalt f_K der Parallelprojektion der Kugel A auf die Randfläche $\dot{K}$ von K.

3. Ersetzt man A durch einen beliebigen Eikörper mit inneren Punkten, der in der Kugel K enthalten ist, so wird aus (2) eine Ungleichung. Man kann dies so einsehen: Sei $f(u)$ der Flächeninhalt des Normalrisses von A auf $E(u)$, entsprechend $f_K(u)$ der Inhalt der Parallelprojektion von A in Richtung u auf $\dot{K}$. Das ebene Flächenstück $f(u)$ ersetzen wir dann durch eine inhaltsgleiche Kreisscheibe mit Zentrum P (Abb. 1) und Radius r, analog das sphärische Flächenstück $f_K(u)$ durch einen mit $f_K(u)$ inhaltsgleichen Kalottenmantel auf $\dot{K}$ mit Zentrum Q (Abb. 1) und Grundkreisradius r_K. Für jedes u besteht dann die Ungleichung

$$0<r\leqq r_K, \tag{3}$$

und es gilt $r=r_K$ für ein u genau dann, wenn der Normalriss von A auf $E(u)$ ein Kreis, also der Riss auf $\dot{K}$ Mantel einer Kugelkalotte ist. Nach einem Ergebnis von Fujiwara [2] und Kubota [3] ist im Fall $r=r_K$ für alle u der Eikörper A eine mit K konzentrische Kugel mit Radius r. Mittels (1) und (3) ist $F(A)$ folgendermassen abschätzbar:

$$F(A)=\frac{1}{\pi}\int f(u)\,du=\frac{1}{\pi}\int \pi r^2(u)\,du \leqq \int r_K^2(u)\,du$$
$$=\int (R-\sqrt{R^2-r_K^2})\cdot(R+\sqrt{R^2-r_K^2})\,du=\frac{1}{\pi F(K)}\int f_K\cdot f'_K\,du$$
$$=\frac{1}{\pi F(K)}\int f_K\cdot(F(K)-f_K)\,du. \tag{4}$$

In (4) bedeuten $f_K := 2\pi R(R-\sqrt{R^2-r_K^2})$ und $f'_K := 2\pi R(R+\sqrt{R^2-r_K^2})$ die Mantelflächen der beiden Kalotten von K mit dem Grundkreisradius r_K. Das Ergebnis lautet:

$$F(A)\cdot F(K) \leqq \frac{1}{\pi}F(K)\int f_K(u)\,du-\frac{1}{\pi}\int f_K^2(u)\,du. \tag{5}$$

Gleichheit besteht in der Ungleichung (5) genau im Fall $r=r_K$ für alle u, folglich für alle mit K konzentrischen Kugeln $A\subset K$.

P. Meyer, Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. Cauchy, *Note sur divers théorèmes relatifs à la rectification des courbes et à la quadrature des surfaces,* C. r. Acad. Sci., Paris, 1060-1065 (1841).

[2] M. Fujiwara, *Unendlich viele Systeme der linearen Gleichungen mit unendlich vielen Variablen und eine Eigenschaft der Kugel,* Sci. Rep. Tohoku Univ. *3,* 199-216 (1914).

[3] T. Kubota, *Einfache Beweise eines Satzes über die konvexe geschlossene Fläche,* Sci. Rep. Tohoku Univ. *3,* 235-255 (1914).

Über den Durchschnitt einer abnehmenden Folge von Parallelepipeden

Von Borovikov [1] stammt der erste Beweis der folgenden, von Kolmogorov vermuteten Aussage: Ist $S_1 \supset S_2 \supset \cdots$ eine monoton abnehmende Folge von Simplexen der Dimension $\leq d$ des d-dimensionalen euklidischen Raumes $\mathbf{R}^d$, dann ist auch $\bigcap S_k$ ein Simplex. Einen anderen Beweis dieses Resultates haben Eggleston, Grünbaum und Klee [2] angegeben. Während der Beweis von Borovikov direkt ist, verwenden sie als Hilfsmittel Kennzeichnungen der Simplexe, die auf Rogers und Shephard [6] bzw. Choquet (vgl. Phelps [5]) zurückgehen. Mit Hilfe des Begriffes der Choquet-Simplexe wird das Ergebnis auch auf den unendlichdimensionalen Fall übertragen. Ferner skizzieren Eggleston, Grünbaum und Klee einen anderen Zugang zu dem Borovikovschen Resultat.

Für Kugeln und Ellipsoide überlegt man sich leicht analoge Resultate. Das legt folgende, allgemeine Frage nahe: Welche (möglichst engen) Klassen von (abgeschlossenen, konvexen) Teilmengen des $\mathbf{R}^d$ haben die Eigenschaft, dass sie mit jeder monoton abnehmenden Folge auch deren Durchschnitt enthalten? Eine entsprechende Frage für aufsteigende Folgen und (die abgeschlossenen Hüllen der) Vereinigungen liegt auf der Hand.

Wir zeigen dazu den folgenden

Satz. *Ist* $\{P_\iota \mid \iota \in I\}$ *eine Familie von Parallelepipeden der Dimension* $\leq d$ *im* $\mathbf{R}^d$, *die bezüglich der Inklusion nach unten gerichtet ist, dann ist auch* $\bigcap\{P_\iota \mid \iota \in I\}$ *ein Parallelepiped im* $\mathbf{R}^d$.

Speziell ist also der Durchschnitt einer monoton abnehmenden Folge von Parallelepipeden wieder ein Parallelepiped. Ist der Durchschnitt d-dimensional, so ist - ebenso wie im Fall der Simplexe - der Beweis sehr einfach (vgl. auch [2]). Zum Beweis des allgemeinen Falles verwenden wir die folgende Kennzeichnung der Parallelepipede von Harazišvili [4]:

Hilfssatz. *Ist* $P \subset \mathbf{R}^d$ *kompakt und konvex, so ist* P *genau dann ein Parallelepiped, wenn es eine Zahl* $\lambda \in \,]0,1[$ *gibt, so dass für jedes* $x \in \mathbf{R}^d$ *der Durchschnitt* $P \cap (\lambda P + x)$ *(leer oder) zentralsymmetrisch ist.*

Wir zeigen zuerst folgende Aussage:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ist } C_1 \supset C_2 \supset \cdots \text{ eine monoton abnehmende Folge}\\ \text{von kompakten, konvexen und zentralsymmetrischen Teil-}\\ \text{mengen des } \mathbf{R}^d, \text{ dann ist auch } \bigcap C_k \text{ zentralsymmetrisch.}\end{array}\right\} \tag{1}$$

Dazu sei $C_1, C_2, \ldots$ eine derartige Folge. Offenbar gilt

$$(k_l) \text{ Teilfolge von } (k) \Rightarrow \bigcap C_{k_l} = \bigcap C_k, \tag{2}$$

$$\bigcap C_k = \{\lim_{k\to\infty} x_k \mid x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \ldots, (x_k) \text{ konvergent}\}. \tag{3}$$

$m_1, m_2, \ldots$ seien die Mittelpunkte von $C_1, C_2, \ldots$ Da (m_k) eine beschränkte Folge im $\mathbf{R}^d$ ist, besitzt sie eine konvergente Teilfolge. Wir bezeichnen diese Teilfolge mit (m_{k_l}) und ihren Limes mit m. Es sei nun $x \in \bigcap C_k$. Dann ist $x \in C_{k_1}, C_{k_2}, \ldots$ Da $m_{k_1}, m_{k_2}, \ldots$ die Mittelpunkte von $C_{k_1}, C_{k_2}, \ldots$ sind, ist auch $2m_{k_1} - x \in C_{k_1}$, $2m_{k_2} - x \in C_{k_2}, \ldots$ Aus (2), (3) folgt daraus $2m - x = \lim_{l\to\infty}(2m_{k_l} - x) \in \bigcap C_k$. $\bigcap C_k$ hat also m als Mittelpunkt, und (1) ist bewiesen.

Zum Beweis des Satzes genügt offenbar der Nachweis der folgenden, schwächeren Aussage:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ist } P_1 \supset P_2 \supset \cdots \text{ eine monoton abnehmende Folge}\\ \text{von Parallelepipeden im } \mathbf{R}^d, \text{ dann ist auch}\\ \bigcap P_k \text{ ein Parallelepiped.}\end{array}\right\} \tag{4}$$

Es sei $P_1, P_2, \ldots$ eine derartige Folge. Wir halten ein $\lambda \in \,]0,1[$ fest. $\bigcap P_k$ ist kompakt und konvex. Ferner ist für jedes $x \in \mathbf{R}^d$ der Durchschnitt $(\bigcap P_k) \cap (\lambda \bigcap P_k + x)$ gleich $\bigcap(P_k \cap (\lambda P_k + x))$, also leer oder als Durchschnitt einer monoton abnehmenden Folge von Parallelepipeden nach (1) selbst zentralsymmetrisch. Daraus und aus dem Hilfssatz folgt (4) und der Beweis des Satzes ist erbracht.

Vermutlich kann man die eingangs gestellten Fragen auch für die Klasse der Teilmengen des $\mathbf{R}^d$ positiv beantworten, die sich als direkte Summen der Form $S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_r \oplus C \oplus L$ darstellen lassen. Dabei bezeichnen $S_1, \ldots, S_r$ Simplexe und C und L einen simplizialen Kegel bzw. einen Unterraum des $\mathbf{R}^d$ (vgl. [3]).

Peter M. Gruber, Universität Linz, Österreich

LITERATURVERZEICHNIS

[1] V. Borovikov, *On the Intersection of a Sequence of Simplices*, Uspehi Mat. Nauk *7*, No. 6 (52), 179-180 (1952) (Russ.); MR *14*, 784 (1953).

[2] H.G. Eggleston, B. Grünbaum und V. Klee, *Some Semicontinuity Theorems for Convex Polytopes and Cell-Complexes*, Comm. Math. Helv. *39*, 165-188 (1964).

[3] P. Gruber, *Zur Charakterisierung konvexer Körper. Über einen Satz von Rogers und Shephard. I, II*, Math. Annalen *181*, 189-200 (1969); *184*, 79-105 (1970).

[4] A.B. Harazišvili, *Charakteristische Eigenschaften des Parallelepipeds*, Soobščenija Akad. Nauk Gružin SSR *72*, 17-19 (1973) (Russ.); Zbl. *274*, 52005 (1974).

[5] R.R. Phelps, *Lectures on Choquet's Theorem*, Van Nostrand Math. Studies, Bd. 7 (Van Nostrand, Princeton, N.J., 1966).

[6] C.A. Rogers und G.C. Shephard, *The Difference Body of a Convex Body*, Arch. Math. *8*, 220-233 (1957).

Aufgaben

Aufgabe 757. Webb has shown (El. Math. *29* [1974], 1-5) that if p is a prime, k an integer, $k \geq 4$ and $p \nmid k$, and if there are integers $x, y, z\,(0 < x \leq y \leq z)$ such that

$$\frac{k}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \tag{*}$$

then $x < 2p/k$ unless either $k \mid 2p+1$ and $x = (2p+1)/k$, or $k \mid p+1$ and $x = 2(p+1)/k$. Show that this result is sharp, in the following sense: given an integer $k \geq 4$ and a real number ε, $0 < \varepsilon < 2$, one can find an arbitrarily large prime p with $p \nmid k$, and integers $x, y, z\,(0 < x < y < z)$ such that (*) holds and that $2 - \varepsilon < kx/p < 2$. (Note that this does not answer the question in Webb's paper, of how close to $2(p+1)/k$ the smallest value of x, among all solutions of (*), can be.)

J. Steinig, Geneva

Lösung des Aufgabenstellers. We consider rationals of the form

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)p} = \frac{(2x+1)p+1}{x(x+1)p}; \tag{**}$$

we choose the positive integer x such that $(x+1)^{-1} \leqslant \varepsilon$, and that $(2x+1, k) = 1$. Then we have $(2x+1, kx(x+1)) = 1$, and we can solve the congruence