

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 32 (1977)  
**Heft:** 3

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Kleine Mitteilungen

### Refinements of a Congruence of Gauss

1. Let  $h$  and  $k$  denote relatively prime odd positive integers. Replacing each multiple  $jh$ , for  $1 \leq j \leq (k-1)/2$ , by its least (in absolute value) residue modulo  $k$ , let  $m_k(h)$  denote the number of these that are negative, and  $M_k(h)$  the sum of these negative integers.

It has long been known that the residue classes modulo 4 of  $h$  and  $k$  determine the parity of  $m_k(h) + m_h(k)$ . This follows from the congruence

$$m_k(h) + m_h(k) + \frac{h-1}{2} \frac{k-1}{2} \equiv 0 \pmod{2},$$

first demonstrated by Gauss for use in his third proof of the law of quadratic reciprocity.

In fact, the following stronger congruence holds.

**Theorem 1.**

$$m_k(h) + m_h(k) + \frac{h-1}{2} \frac{k-1}{2} \equiv 0 \pmod{4}.$$

From this result, one sees that the residue class modulo 4 of  $m_k(h) + m_h(k)$  is determined by the residue classes modulo 8 of  $h$  and  $k$ . That these latter classes also determine the parity of  $M_k(h) + M_h(k)$  follows from:

**Theorem 2.**

$$M_k(h) + M_h(k) \equiv \frac{h-1}{2} \frac{k^2-1}{8} + \frac{k-1}{2} \frac{h^2-1}{8} \pmod{2}.$$

2. The novelty of the above statements is somewhat surprising in that they appear quite simply as the offspring of rather aged parents. This section lists these results, the only innovative feature being the proof of (3) which is considerably simpler than that given in [1], p. 229–230.

The formula

$$m_k(h) = \sum_{j=1}^{(k-1)/2} \left\{ \left[ \frac{jh}{k} + \frac{1}{2} \right] - \left[ \frac{jh}{k} \right] \right\} \quad (1)$$

notes the fact that the contribution of the  $j$ -th term is one if the least residue of  $jh \pmod{k}$  is negative and zero otherwise.

The classical reciprocity formula

$$\sum_{i=1}^{(h-1)/2} \left[ \frac{ik}{h} \right] + \sum_{j=1}^{(k-1)/2} \left[ \frac{jh}{k} \right] = \frac{h-1}{2} \frac{k-1}{2} \quad (2)$$

is proved by counting the ordered pairs  $(i, j)$  with  $1 \leq i \leq (h-1)/2$ ,  $1 \leq j \leq (k-1)/2$ . The first sum counts those pairs for which  $jh < ik$ , the second those for which  $jh > ik$ , the equation  $jh = ik$  being insoluble.

Now, counting only those pairs for which  $(2i-1)k \leq 2jh$ , it is easily seen that they number

$$\sum_{j=1}^{(k-1)/2} \left[ \frac{jh}{k} + \frac{1}{2} \right].$$

Defining the associated pair  $(i^*, j^*)$  by  $i^* = \frac{h+1}{2} - i, j^* = \frac{k+1}{2} - j$ , one verifies the equivalence of the two inequalities  $(2i-1)k \leq 2jh$  and  $(2j^*-1)h \leq 2i^*k$ . It follows immediately that

$$\sum_{i=1}^{(h-1)/2} \left[ \frac{ik}{h} + \frac{1}{2} \right] = \sum_{j=1}^{(k-1)/2} \left[ \frac{jh}{k} + \frac{1}{2} \right]. \quad (3)$$

Implicit in [2], p. 65-66, one has

$$\frac{(h-1)(k^2-1)}{8} = k \left( m_k(h) + \sum_{j=1}^{(k-1)/2} \left[ \frac{jh}{k} \right] \right) + 2M_k(h). \quad (4)$$

Since the left hand side of (4) is even,

$$m_k(h) \equiv \sum_{j=1}^{(k-1)/2} \left[ \frac{jh}{k} \right] \pmod{2} \quad (5)$$

and, combining this with (1),

$$\sum_{j=1}^{(k-1)/2} \left[ \frac{jh}{k} + \frac{1}{2} \right] \equiv 0 \pmod{2}. \quad (6)$$

3. The proofs of the theorems can now be rapidly completed. Combining (3) and (6) gives

$$\sum_{i=1}^{(h-1)/2} \left[ \frac{ik}{h} + \frac{1}{2} \right] + \sum_{j=1}^{(k-1)/2} \left[ \frac{jh}{k} + \frac{1}{2} \right] \equiv 0 \pmod{4}.$$

Inserting this in (1),

$$\left( m_k(h) + \sum_{j=1}^{(k-1)/2} \left[ \frac{jh}{k} \right] \right) + \left( m_h(k) + \sum_{i=1}^{(h-1)/2} \left[ \frac{ik}{h} \right] \right) \equiv 0 \pmod{4}.$$

Theorem 1 now follows from (2). Moreover, by (5), each of the expressions in parentheses is even, and so,

$$k \left( m_k(h) + \sum_{j=1}^{(k-1)/2} \left[ \frac{jh}{k} \right] \right) + h \left( m_h(k) + \sum_{i=1}^{(h-1)/2} \left[ \frac{ik}{h} \right] \right) \equiv 0 \pmod{4}.$$

Theorem 2 follows by virtue of (4).

*Remark.* It should be noted that a completely different proof of these results may be given by using a result on Dedekind sums due to ROSEN [3].

John B. Friedlander and Kenneth H. Rosen,  
Massachusetts Institute of Technology Cambridge, USA

## REFERENCES

- 1 P. BACHMANN, *Niedere Zahlentheorie*, Teubner, Leipzig, 1902, reprinted: Chelsea, New York, 1968.
- 2 I. NIVEN and H.S. ZUCKERMAN, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 3rd ed., Wiley, New York, 1972.
- 3 K.H. ROSEN, *Congruences for Dedekind Sums*, to appear.

# Elementarmathematik und Didaktik

## Eine besondere Art gleichseitiger Sechsecke

Bei gleichseitigen Streckenzügen, deren Ecken abwechselnd auf zwei konzentrischen Kreisen liegen, gilt eine einfache Winkelbeziehung. Die Umkehrfrage führt in 1. auf besondere Sechsecke. Sie werden in 2. rein algebraisch gefunden. In 3. wird auf ein besonderes Gelenkviereck hingewiesen.

### 1. Definition und Eigenschaften der Sechsecke $\Sigma$

Gegeben seien in der euklidischen Ebene die Kreise  $k_0, k_1$  (Mitten  $K_0, K_1$ , Radien  $r_0, r_1$ , Abstand  $\overline{K_0 K_1} = e$ ). Von einem Punkt  $0$  auf  $k_0$  und einem Punkt  $1$  auf  $k_1$  ausgehend, sei in Abb. 1 der Streckenzug  $\dots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$  konstruiert, bei dem Nachbarecken den konstanten Abstand  $\overline{v, v+1} = \overline{0, 1} = l$  haben ( $v$  ganz).  $a_v$  sei der (orientierte) Winkel der (orientierten) Geraden  $K_0 K_1$  mit  $K_0 v$  (wenn  $v$  gerade ist) bzw.  $K_1 v$  ( $v$  ungerade).  $\bar{1}, \bar{2}$  seien die Fusspunkte der Normalen aus  $1$  bzw.  $2$  auf  $K_0 K_1$ . Wegen  $\sphericalangle K_1 K_0 1 = (a_0 + a_2)/2$  und  $180^\circ - \sphericalangle K_0 K_1 2 = (a_1 + a_3)/2$  folgt

$$\text{a) } \operatorname{tg} \frac{a_0 + a_2}{2} = \frac{\bar{1}1}{K_0 \bar{1}} = \frac{r_1 \sin a_1}{r_1 \cos a_1 + e}, \quad \text{b) } \operatorname{tg} \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{\bar{2}2}{K_1 \bar{2}} = \frac{r_0 \sin a_2}{r_0 \cos a_2 - e}. \quad (1a, b)$$

Im Sonderfall  $e=0$  ist  $\operatorname{tg} \frac{a_0 + a_2}{2} = \operatorname{tg} \frac{a_1}{2}, \dots$ . Es folgt  $a_v - 2a_{v+1} + a_{v+2} \equiv 0 \pmod{360^\circ}$ .

*Wir stellen nun die Umkehrfrage: Besteht eine lineare Beziehung  $a_v + a_{v+2} = \lambda a_{v+1} + \mu$  mit Konstanten  $\lambda, \mu$  nur bei konzentrischen Kreisen?* Nach (1a) müsste  $(a_0 + a_2) = 2 \arctg \left( \frac{r_1 \sin a_1}{r_1 \cos a_1 + e} \right) = \lambda a_1 + \mu$  für alle  $a_1$  gelten. Hieraus folgt durch zweimalige Differentiation nach  $a_1$ : Für alle  $a_1$  muss  $er_1(r_1^2 - e^2) \sin a_1 / (e^2 + 2er_1 \cos a_1 + r_1^2)^2 = 0$  sein. Wegen  $r_1 \neq 0$  folgt, dass  $e=0$  oder  $e=r_1$  sein muss. Aus (1b) folgt ebenso, dass  $e=0$  oder  $e=r_2$  sein muss. Der Fall