

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 32 (1977)
Heft: 3

Artikel: Minimale Gitterwege mit Nebenbedingungen
Autor: Binz, J.C.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-32155>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Fläche von R wäre demnach mindestens pq , andererseits gilt aber für ein Rechteck mit Seiten p, q exakt $F(R) = pq$. Also muss die Fläche eines Elementardreiecks genau $1/2$ sein.

G. Walther, PH Ruhr, Dortmund

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 W.W. Funkenbusch: From Euler's formula to Pick's formula using an edge theorem. Amer. Math. Monthly 81, 647-648 (1974).
- 2 R.W. Gaskell, M.S. Klamkin und P. Watson: Triangulations and Pick's Theorem. Mathematics Magazine 49, 35-37 (1976).
- 3 M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik I. Stuttgart 1973.
- 4 H. Meschkowski: Grundlagen der euklidischen Geometrie. Mannheim 1966.

Minimale Gitterwege mit Nebenbedingungen

In einem ebenen Gitter betrachten wir Gitterwege minimaler Länge von $(0, 0)$ nach (n, m) , wo n und m natürliche Zahlen bedeuten. Alle solchen Wege bestehen aus n horizontalen und m vertikalen Einheitsstrecken und haben die Länge $n+m$. Ihre Anzahl beträgt daher

$$z(n, m) = \binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}.$$

Fordern wir zusätzlich, dass die zulässigen Wege die Gerade $g: ky - x = 0$ ($k \in \mathbb{N}$) nicht überschreiten dürfen, so vermindert sich deren Anzahl um die Zahl $v(n, m)$ der Wege, welche g überschreiten. Die Anzahl der zulässigen Wege wird dann $z^*(n, m) = z(n, m) - v(n, m)$.

Offensichtlich ist $z^*(n, m) = 0$ für $n < km$; im folgenden sei deshalb $n \geq km$ vorausgesetzt.

In [1] stellt M. Jeger die Lösung des Problems für $k = 1$ mit Hilfe einer Spiegelungs-idee von D. André [3] auf eine sehr instruktive Art dar; für $k > 1$ versagt das Spiegelungsverfahren, doch beweist er die Gültigkeit einer vermuteten Formel aufgrund der Randwerte 0 auf der Geraden $ky - x - 1 = 0$ und der Randwerte 1 auf der x -Achse mit Hilfe einer Rekursionsformel. In [2] findet sich dann die Lösung mit Verwendung formaler Potenzreihen. Wir stellen uns die Aufgabe, $z^*(n, m)$ direkt mit einer kombinatorischen Idee zu bestimmen. Dazu genügt es, die Anzahl $v(n, m)$ der verbotenen Wege zu berechnen.

Es bedeuten V die Menge der verbotenen Wege von $(0, 0)$ nach (n, m) und M die Menge aller Minimalwege von $(0, 0)$ nach $(n+1, m-1)$. Jeden Weg aus V identifizieren wir mit einer $(n+m)$ -stelligen Folge mit n Gliedern «1» und m Gliedern « $-k$ », wo jede 1 für eine horizontale und jedes Glied $-k$ für eine vertikale Einheitsstrecke des Weges steht. Jeder solchen Folge $f = (x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$ ordnen wir die «Partialsommen»

$$s_0(f) = 0, s_v(f) = \sum_{i=1}^v x_i$$

zu; es ist dann $s_{n+m}(f) = n - km \geq 0$. Dass f einem verbotenen Weg entspricht, äussert sich jetzt darin, dass für mindestens ein v $s_v(f)$ negativ wird. Sei v die kleinste Nummer, für die $s_v(f) < 0$ ausfällt. Dann sind $x_v = -k$, $s_v(f) = -i$ ($i \in \{1, 2, \dots, k\}$) und $s_{v-1}(f) = -i + k$; $V_i \subset V$ seien die Mengen der verbotenen Wege mit dieser Eigenschaft; es gelten dann $V_i \cap V_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und

$$V = \bigcup_{i=1}^k V_i.$$

Für ein festes i konstruieren wir jetzt eine Abbildung $\varphi: V_i \rightarrow M$ durch $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{v-1}, -k, x_{v+1}, \dots, x_{n+m}) = (x_{v-1}, \dots, x_1, 1, x_{v+1}, \dots, x_{n+m})$, abgekürzt $\varphi(f) = f'$; d.h. wir ersetzen die Vertikale x_v durch eine Horizontale, kehren die Reihenfolge der vorhergehenden Glieder um und lassen die Reihenfolge der nachfolgenden Glieder bestehen.

Es gelten $s_v(f') = k - i + 1$, $s_{v-1}(f') = k - i$ und $s_{n+m}(f') = n - km + k + 1 \geq k + 1$. Wäre $s_\mu(f') = k - i + 1$, $s_{\mu-1}(f') = k - i$ für ein $\mu < v$, so würde $x_{v-\mu-1} + \dots + x_1 = -1 < 0$, im Widerspruch zur Minimalitätsbedingung für v . Somit lässt sich f aus f' eindeutig rekonstruieren, φ ist also injektiv. Da zudem für jede beliebige Folge $f'' \in M$ $s_{n+m}(f'') \geq k + 1$ gilt und weil Zunahmen von s_v immer nur um 1 erfolgen, gibt es eine kleinste Nummer μ mit $s_\mu(f'') = k - i + 1$, $s_{\mu-1}(f'') = k - i$. Wie oben ergibt sich daraus die Existenz einer Folge $f \in V_i$ mit $\varphi(f) = f''$; φ ist somit surjektiv. φ ist also eine Bijektion und es gilt $|V_i| = |M|$. Da sich die Überlegungen für jedes i wiederholen lassen, folgt $|V| = k|M|$ und daraus

$$z^*(n, m) = \binom{n+m}{n} - k \binom{n+m}{n+1}.$$

J. C. Binz, Universität Bern

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik, Band 1, S. 139–146, Stuttgart 1973.
- 2 M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik, Band 2, S. 72–77, Stuttgart 1976.
- 3 D. André: Solution directe du problème résolu par M. Bertrand. C.R. Acad. Sci. Paris 105, 436–437 (1887).

Aufgaben

Aufgabe 765. Es sei für reelle $x \geq 2$

$$f^1(x) = f(x) = [\sqrt{x}], f^k(x) = f^{k-1}(f(x)), k = 2, 3, \dots$$

Man bestimme

$$n(x) = \min \{k \in \mathbf{N} \mid f^k(x) = 1\}.$$

R. Wyss, Flumenthal SO