

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 33 (1978)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Extremaleigenschaften rotationssymmetrischer Kegelstümpfe im gewöhnlichen Raum. 1. Teil  
**Autor:** Bieri, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32935>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$+p_3+p_4+p_5+p_6$ . It is not entirely obvious that this formula is the same as the formula obtained in section 2 above for this problem.

Jeanne W. Kerr, University of California, San Diego, La Jolla, Cal.,  
and John E. Wetzel, University of Illinois, Urbana, Ill., USA

#### ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to thank Marianne Wojciechowski Jankowski for preparing the figures.

#### REFERENCES

- 1 G. L. Alexanderson and John E. Wetzel: Dissections of a plane oval, to appear in Amer. Math. Monthly.
- 2 Bro. U. Alfred «Brousseau»: A mathematician's progress. Math. Teacher 59, 722-727 (1966).
- 3 Norman Bauman: Solution to E 2359. Amer. Math. Monthly 80, 561-562 (1973).
- 4 J. W. Freeman: The number of regions determined by a convex polygon. Math. Mag. 49, 23-25 (1976).
- 5 Ross Honsberger: Mathematical Gems, Dolciani Mathematical Expositions, No. 1. Math. Assoc. of America, Washington, D.C., 1973.
- 6 John E. Wetzel: Dissections of a simply-connected plane domain, to appear in Amer. Math. Monthly.
- 7 A. M. Yaglom and I. M. Yaglom: Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions, Vol. 1. Holden-Day, San Francisco 1964.

## Extremaleigenschaften rotationssymmetrischer Kegelstümpfe im gewöhnlichen Raum (1. Teil)

In dieser Note behandeln wir ein Extremalproblem, Teilproblem eines viel allgemeineren, unter III zu erläuternden Extremalproblems über konvexe Rotationskörper, und letzteres ordnet sich einem Hauptproblem über allgemeine konvexe Körper unter, das unter II kurz dargelegt wird. Die gesonderte Behandlung des Kegelstumpfproblems rechtfertigt sich durch die mit gesicherten Teilresultaten untermauerte Vermutung, dass die Extremalkörper unseres Spezialproblems mit Minimumeigenschaften dieselben im Problem III wenigstens teilweise beibehalten. Weitergehende Untersuchungen bezüglich der notwendigen Bedingungen für Extrema im Problem III lassen sogar den Schluss zu, dass die Aussonderung der Kegelstümpfe nicht zu umgehen ist.

Unsere Ausführungen beziehen sich ausschliesslich auf den gewöhnlichen Raum und die gewöhnliche Ebene.

## I. Einleitung (vgl. [1])

Wir nennen *Eikörper* jede beschränkte, abgeschlossene und konvexe Punktmenge mit innern Punkten. Ein Eikörper heisst *Halbkörper*  $\mathfrak{S}$ , wenn  $\mathfrak{S} \cup \mathfrak{S}^*$  wieder ein Eikörper ist, wo  $\mathfrak{S}^*$  das Spiegelbild von  $\mathfrak{S}$  an einer ausgezeichneten Stützebene bedeutet.

Jedem Eikörper  $\mathfrak{A}$  kommen drei Hauptmasszahlen zu, nämlich

$$V = V(\mathfrak{A}) = \text{Volumen}, \quad F = F(\mathfrak{A}) = \text{Oberfläche}, \quad M = M(\mathfrak{A}).$$

$M(\mathfrak{A})$  wird in der Literatur als Integral der mittlern Krümmung bezeichnet. Indessen ist es klar, dass dies nur unter der Voraussetzung zutreffend ist, dass die Oberfläche des Körpers mindestens zweimal stetig differenzierbar sei. Allgemeingültig ist  $M = \int (1/2) b(n) dn$ , wo  $b(n)$  die Breite des Körpers in der Richtung  $n$  bedeutet, und noch einfacher schreibt man  $M = 2\pi \cdot \bar{b}$ , wo jetzt  $\bar{b}$  die mittlere Breite bedeutet.

Diese Funktionale sind definit, monoton und homogen vom Grade 3, 2, 1. Insbesondere gilt das für die Ausführungen in II wichtige Gesetz

$$V(vA) = v^3 V(A), \quad F(vA) = v^2 F(A), \quad M(vA) = vM(A).$$

Wir haben uns mit dem Begriff *konvexer Rotationskörper*  $\mathfrak{R}$  eingehend vertraut zu machen. Es existieren  $\infty$ -viele, die Rotationsachse enthaltende Symmetrieebenen. Ihr Durchschnitt mit  $\mathfrak{R}$  ist für jede dieser Ebenen ein konvexer Bereich, dessen Rand *Meridiankurve* mit der Länge  $2L$  heisse. Ebenen senkrecht zur Rotationsachse schneiden aus  $\mathfrak{R}$  Kreise mit den Radien  $r$  aus. Den grössten dieser Radien nennen wir *Äquatorradius*  $a$ . Der Abstand der beiden auf der Rotationsachse senkrecht stehenden Stützebenen wird mit  $l$  bezeichnet. Ist die Meridiankurve ein Polygon, so handelt es sich um einen *polygonalen Rotationskörper*. In Abbildungen heisse der Originalbereich  $G$ , der Bildbereich  $\bar{G}$ .

## II. Das Hauptproblem ([1], S. 72–78)

Ein völlig befriedigender Abschluss der Theorie der fundamentalen Masszahlen konvexer Körper würde erreicht, wenn es gelänge, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufzufinden dafür, dass zu drei gegebenen nichtnegativen Zahlen  $V, F, M$  mindestens ein Eikörper existiert. Die Lösung dieses Problems erfordert offenbar die Auffindung aller zwischen den fundamentalen Masszahlen bestehenden Relationen. Mithin handelt es sich um das Problem des vollständigen Ungleichungssystems. Bis heute sind folgende Hauptungleichungen bekannt:

### 1. Minkowskische Ungleichung

$$M^2 - 4\pi F \geq 0 \quad (\text{Gleichheit nur für Kugeln})$$

## 2. Minkowskische Ungleichung

$$F^2 - 3MV \geq 0 \quad (\text{Gleichheit nur für Kappenkörper der Kugeln, insbesondere auch für Kugeln und Strecken})$$

## 3. Isoperimetrische Ungleichung

$$F^3 - 36\pi V^2 \geq 0 \quad (\text{Gleichheit nur für Kugeln und Strecken})$$

$$M^3 - 48\pi^2 V \geq 0 \quad (\text{Gleichheit nur für Kugeln})$$

$$V \geq 0 \quad (0 \leq 4\pi^3 F \leq 8M^2) \quad (\text{Gleichheit nur für ebene konvexe Bereiche})$$

Leider fehlt eine weitere Ungleichung von der Form

$$V \geq f(M, F) \quad (\text{Gleichheit für noch unbekannte Körper, welche zwischen Kreisscheiben und Kugeln interpolieren})$$

$$(8M^2 \leq 4\pi^3 F \leq \pi^2 M^2)$$

Über die zugehörigen Extremalkörper, welche bei vorgegebenem  $M$  und  $F$  ein absolutes Minimum des Volumens besitzen, existiert wohl eine plausible Vermutung ([1], S. 73–78), die bis heute aber nicht bewiesen werden konnte. H. Hadwiger erzielte eine Teillösung des Hauptproblems unter einschränkenden Bedingungen über die Differenzierbarkeitsverhältnisse innerhalb der einem Eikörper zugeordneten vollständigen Parallelenschar ([1], S. 78–81).

Man gewinnt eine klare Übersicht über die bestehenden Verhältnisse, wenn das Problem in ein geometrisches Gewand gesteckt wird. Die Quotienten passend gewählter Potenzen von je zwei Masszahlen sind invariant gegenüber Ähnlichkeit. Normiert man dieselben so, dass sie für Kugeln den Wert 1 annehmen, so gewinnt man die Ausdrücke

$$x = \frac{4\pi F}{M^2}, \quad y = \frac{48\pi^2 V}{M^3}, \quad z = \frac{36\pi V^2}{F^3}. \quad (1)$$

Es wird nun jedem Eikörper ein Punkt in einer Diagrammebene mit zweien der obigen Ausdrücke als Koordinaten zugeordnet. Die Menge aller Eikörper wird so in eine ebene Punktmenge  $\bar{G}$  abgebildet, und man erhält das Blaschke-Diagramm ([1], S. 72–74).

Meines Wissens ist bis heute immer nur das  $(x, y)$ -Diagramm verwendet worden. Das  $(x, z)$ -Diagramm bietet aber gewisse Vorteile. So werden in der Umgebung des Streckenpunktes alle Kurven gehoben, in der Umgebung des Kreisscheibenpunktes aber gesenkt und besser getrennt. Auch das  $(y, z)$ -Diagramm hat seine Berechtigung. Man wird es benützen, wenn die Schwarzsche Abrundung als Beweismittel verwendet werden kann.

### III. Das Rotationskörperproblem

Vom Standpunkt der elementaren Geometrie aus ist die Beschränkung auf Rotationssymmetrie bedeutsam. Wie in vielen andern Problemen lassen sich auch hier Fortschritte erzielen.

Zunächst bleiben alle in II aufgeführten Ungleichungen bestehen. Jedoch gilt in der 2. Minkowskischen Ungleichung das Gleichheitszeichen nur noch für Strecken und Kappenkörper mit 1 oder 2 Kappen, in  $V \geq 0$  sogar nur noch für Strecken und Kreisscheiben, da dies die einzigen ebenen konvexen Bereiche mit Rotationssymmetrie sind. Der grosse Fortschritt bestand in der Auffindung einer Ungleichung  $V \geq f(M, F)$  in  $8M^2 \leq 4\pi^3 F \leq \pi^2 M^2$ . Sie ist transzendent, und die zugehörigen Minimalkörper sind die symmetrischen Kugelschichten [2].

Allerdings müssen nun neue Ungleichungen gefunden werden, welche dem Tatbestand Rechnung tragen, dass noch unbekannte Extremalkörper existieren, welche zwischen Strecken und Kreisscheiben interpolieren (Fig. 1).

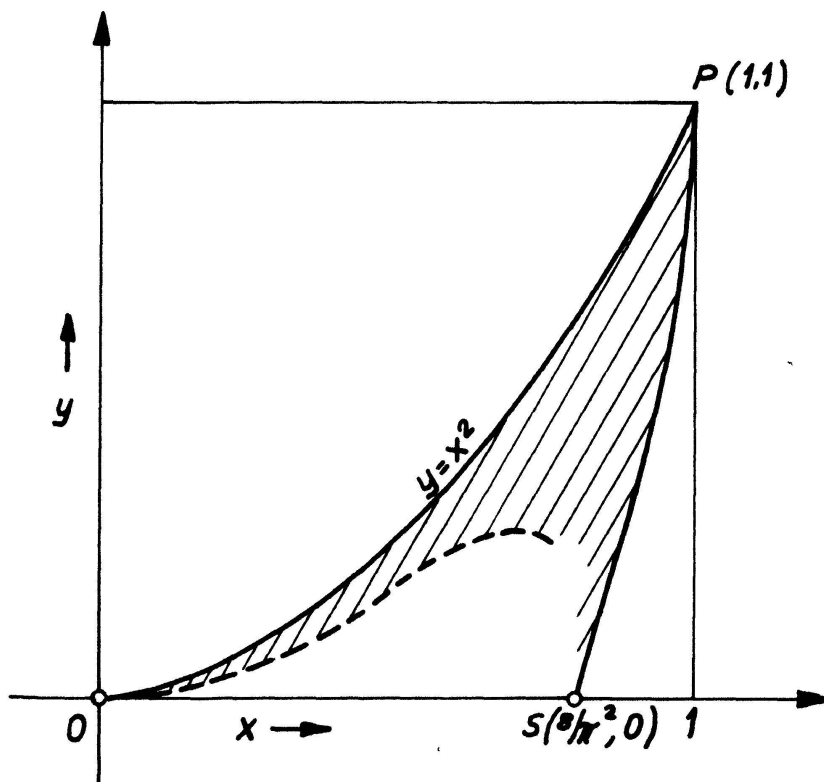


Abb. 1

$\bar{G}$  ist jetzt beschränkt, abgeschlossen und zusammenhängend, jedoch ist der von  $O$  bis  $S$  führende Teil des Randes noch unbekannt. Nach aussen erfolgt der Abschluss durch den Parabelbogen  $y=x^2$  sowie durch einen Bogen einer gewissen, nun bekannten transzendenten Kurve ([2], S. 75). Einparametrische Rotationskörperfamilien bilden sich als Kurven ab. Wir werden also in IV von Kurven sprechen dürfen, ohne dass Missverständnisse zu befürchten sind, und Kurvendiskussion wird ein wichtiges und durchaus elementares Beweismittel sein.

Man verdankt H. Hadwiger viele schöne Resultate über konvexe Rotationskörper

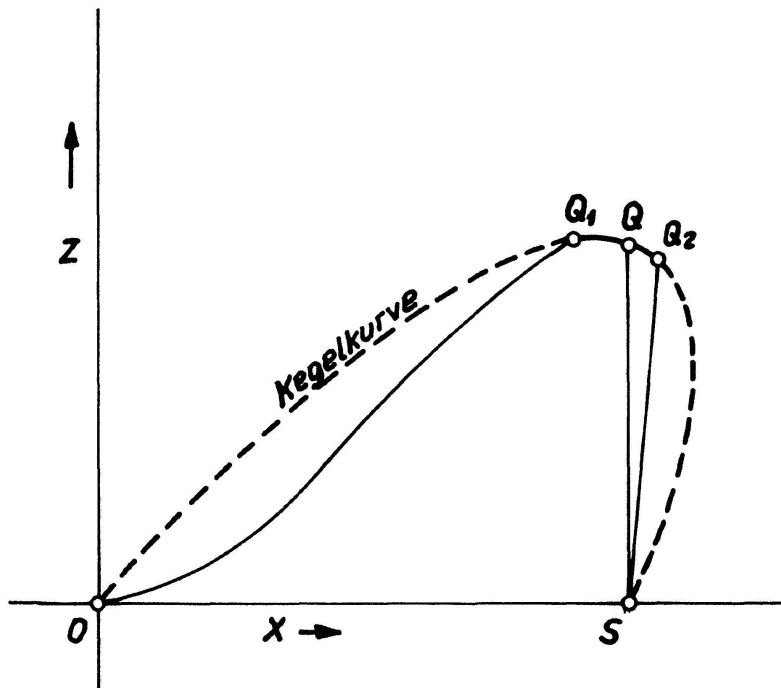


Abb.2

[3-7]. Gestützt auf eine äusserst zweckmässige Integraldarstellung der fundamentalen Masszahlen (alle Integranden sind frei von Ableitungen!) ist es ihm gelungen, ein System von linearen Ungleichungen aufzustellen, in welche der feste Äquatorradius  $a$  eingeht. Mit Hilfe dieser auf Koordinaten umgerechneten Ungleichungen konnte gezeigt werden, dass der innere Bildrand von  $\bar{G}$  in der Umgebung von  $S$  nach rechts überhängt d.h. dass  $x$  vom Anfangswert  $8/\pi^2$  bis zu einem vorderhand unbekanntem Maximalwert zunimmt [8, 9]. Diese Tatsache ist von grosser Bedeutung, weiss man doch jetzt, dass  $\bar{C}$  rechts von  $S$  von Parallelen zur  $y$ -Achse in 4 Punkten geschnitten wird und somit relative Extrema auftreten, was zum vornherein nicht vorauszusehen war.

Meine in der Zeitschrift *Experientia* veröffentlichten Noten förderten Extremaleigenschaften der Kegelstümpfe, insbesondere der Zylinder und Kegel bei fester Länge  $l$  in den Problemen mit zwei Masszahlen zutage [10]. Kombination aller erwähnten Ergebnisse erlaubt nun eine weitergehende Aussage über den innern Bildrand ([11], Fig.2).

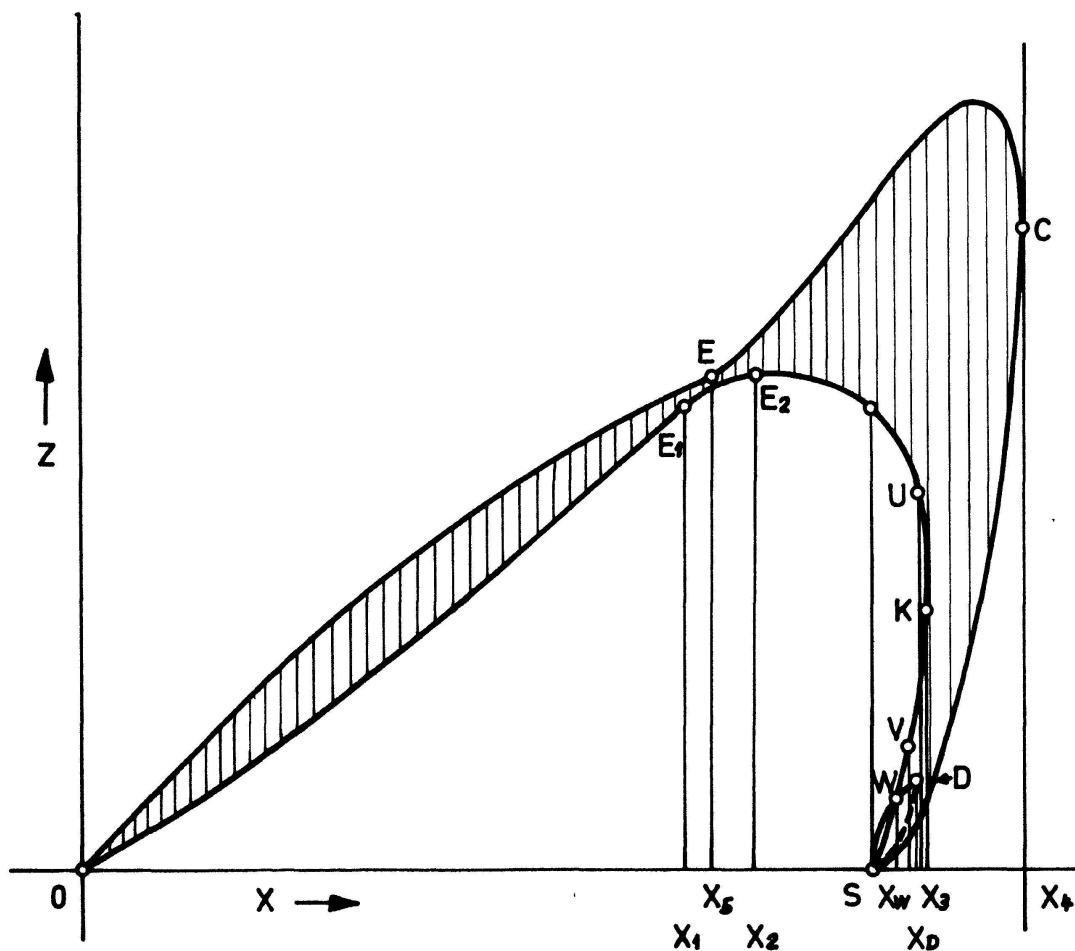
Die Bogen  $OQ_1$  sowie  $Q_2S$  sind unscharfe Ränder von  $\bar{G}$ , der Bogen  $Q_1Q_2$  dagegen begrenzt scharf. Da  $Q$  zwischen  $Q_1$  und  $Q_2$  liegt, bedeutet dies, dass eine endliche Teilschar von Kegeln bei festem  $x$  ein absolutes, eine andere endliche Teilschar von Kegeln noch ein relatives Minimum von  $z$  aufweist (die Aussage ist ebenfalls für  $y$  gültig).

Kegelstümpfe, Zylinder und Kegel sind Halbkörper. Es erscheint lohnend, unser Problem zunächst für die abgeschlossene Klasse aller  $\S$  in Angriff zu nehmen. Es sind hier bereits überraschende Teilresultate gefunden worden [12]. Das Hauptinteresse konzentriert sich indessen auf den innern Bildrand.

Die obigen Ausführungen lassen es angezeigt erscheinen, die Klasse der Kegelstümpfe auszusondern, da wir mit grosser Wahrscheinlichkeit Auskunft über den innern Bildrand in der Klasse aller  $\S$  erhalten werden.

#### IV. Das Kegelstumpfproblem

In einer ausführlichen Note vom Jahre 1955 [13] habe ich über Extremaleigenschaften in der abgeschlossenen Klasse der konvexen Kegelstümpfe im gewöhnlichen Raum berichtet. Die damaligen Resultate sind unvollständig. Insbesondere konnte die Diskriminante einer einparametrischen Schar von kubischen Gleichungen mit den mir damals zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln nicht abschliessend diskutiert werden, so dass die Frage nach der Anzahl der reellen Wurzeln der erwähnten Gleichungen im Teilintervall  $\pi/4 < \psi \leq \pi/2$  unbeantwortet bleiben musste. Auch war die Minimaleigenschaft der einparametrischen Zylinderschar in der Umgebung der Kreisscheibe nicht sichergestellt, so dass in derselben Umgebung ein unscharfer Bildrand eingeführt werden musste ([13], S. 182–184). Diese



$$E_1: x \sim 0,68935 \\ z \sim 0,48942$$

$$E_2: x \sim 0,71242 \\ z = 0,5$$

$$D: x \sim 0,8257 \\ z \sim 0,0472 \\ \text{(Kegelstumpf)}$$

$$U: x \sim 0,857102 \\ z \sim 0,294055$$

Abb. 3

Mängel werden in der vorliegenden Note ausgemerzt<sup>1)</sup>. Die Schar der konvexen Kegelstümpfe ist zweiparametrig. Es gibt wichtige einparametrische Scharen, deren Bilder im Blaschke-Diagramm Kurven sind. Wir sprechen also künftig von der Zylinderkurve, der Kegelkurve usw.

Wir geben zunächst die gefundenen Resultate bekannt, die aus der Figur 3 mühelos abgelesen werden können. Anschliessend folgen die Beweise.

Der Bildbereich  $\bar{G}$  ist beschränkt, zusammenhängend und abgeschlossen. Nach aussen wird er vom Kegelkurvenbogen  $OE$  sowie anschliessend vom Zylinderkurvenbogen  $ES$  berandet. Nach innen folgen sich als Randstücke der Zylinderkurvenbogen  $OE_1$ , der Bogen  $E_1E_2$ , Bild einer speziellen einparametrischen Kegelstumpfschar, deren Parameter einer kubischen Gleichung  $\Phi = 0$  genügen (vgl. [13]); sodann der Kegelkurvenbogen  $E_2W$  und schliesslich der Bogen  $WS$ , Bild einer weiteren einparametrischen Kegelstumpfschar, die ebenfalls durch  $\Phi = 0$  festgelegt ist.

Bei festem  $x$  besitzen im Intervall

$0 \leq x \leq x_1$	Zylinder ein absolutes Minimum von $z$
$x_1 < x < x_2$	Kegelstümpfe ein absolutes Minimum von $z$
$x_2 \leq x < 8/\pi^2$	Kegel ein absolutes Minimum von $z$
$8/\pi^2 \leq x \leq x_3$	Kegel ein relatives Minimum von $z$
$x_w \leq x \leq x_3$	Kegel ein relatives Maximum von $z$
$8/\pi^2 < x \leq x_w$	spezielle Kegelstümpfe ein relatives Maximum von $z$
$0 \leq x \leq x_5$	Kegel ein absolutes Maximum von $z$
$x_5 \leq x \leq x_4$	Zylinder ein absolutes Maximum von $z$
$8/\pi^e \leq x \leq x_4$	Zylinder ein absolutes Minimum von $z$

Nun kann durch eine Ähnlichkeit immer erreicht werden, dass Körper, die gleiches  $x$  aufweisen, auch in  $F$  und  $M$  übereinstimmen. Die extremale Grösse ist dann  $V$ . Demnach dürfen wir unsere Behauptungen so beginnen lassen:

Bei festem  $F$  und  $M$  –, und es wird das Extremum von  $V$  festgestellt. In analoger Weise liest man aus der Figur 3 Extrema der zwei andern Masszahlen ab.

Die Beweisführung erfolgt im 2. Teil der Arbeit und wird in nächster Zeit in dieser Zeitschrift erscheinen.

H. Bieri, Wabern (Köniz)

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 H. Hadwiger: Altes und Neues über konvexe Körper. Elemente der Mathematik vom höhern Standpunkt aus. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart.
- 2 H. Hadwiger: Beweis einer Extremaleigenschaft der symmetrischen Kugelzonen. Portugaliae Mathematica 7, Fasc. 2 (1948).
- 3 H. Hadwiger: Elementare Studie über konvexe Rotationskörper. Math. Nachr. 2, Heft 3/4 (März 1949).

1) Ich danke Herrn Prof. Max Schürer, Bern, für den Einsatz des Computers des astronomischen Institutes und für seine Mitarbeit.



- 4 H. Hadwiger: Einige neue Ergebnisse über extremale konvexe Rotationskörper. Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Universität Hamburg, Bd. 18 (Dez. 1952).
- 5 H. Hadwiger: Über eine vollständige Schar extremaler konvexer Rotationskörper. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 59, Heft 1, 7-12 (1956).
- 6 H. Hadwiger: Über eine Ungleichung für drei Minkowskische Masszahlen bei konvexen Rotationskörpern, Monatsh. Math. 56, 3. Heft (1952).
- 7 H. Hadwiger: Minkowskische Ungleichungen und nichtkonvexe Rotationskörper. Math. Nachr. 14, Heft 4/6 (Dez. 1956).
- 8 H. Hadwiger und H. Bieri: Eine Unstetigkeitserscheinung bei extremalen konvexen Rotationskörpern. Math. Nachr. 13, Heft 1/2 (Jan./Feb. 1955).
- 9 H. Hadwiger und H. Bieri: Zum Problem des vollständigen Ungleichungssystems für konvexe Rotationskörper. El. Math. XIII/5 (1957).
- 10 H. Bieri: Die wichtigsten Publikationen finden sich in den Fussnoten von [11].
- 11 H. Bieri: Beitrag zu einem Extremalproblem über konvexe Rotationskörper. Exper. XIV, Fasc. 3, 113-116 (15. März 1958).
- 12 H. Bieri: Extremale konvexe Rotationskörper im  $V, F, M$ -Problem des  $R_3$ . El. Math. 24/6 (1969).
- 13 H. Bieri: Untersuchungen über rotationssymmetrische Kegelstümpfe. Seminario Mat. De Barcelona VIII (1955).

## Kleine Mitteilungen

### Bemerkungen über Eindeutigkeitsmengen additiver Funktionen

Eine zahlentheoretische Funktion  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$  heisst vollständig additiv, wenn für alle  $n, m \in \mathbf{N}$   $f(nm) = f(n) + f(m)$  gilt. Nach Kátai [3] nennt man eine Menge  $A$  natürlicher Zahlen Eindeutigkeitsmenge vollständig additiver Funktionen (kurz:  $E$ -Menge), wenn für jede vollständig additive, zahlentheoretische Funktion  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$  aus  $f(A) = \{0\}$  die Gleichung  $f(\mathbf{N}) = \{0\}$  folgt. Die Menge  $\mathbf{P}$  der Primzahlen ist offenbar eine  $E$ -Menge, jede echte Teilmenge von  $\mathbf{P}$  dagegen nicht.

Kátai [4] zeigte, dass für ein gewisses  $C > 0$  die Menge

$$\{n \in \mathbf{N}, n \leq C\} \cup \{p+1, p \text{ prim}\}$$

$E$ -Menge ist. Elliott [1] wies diese Eigenschaft für die Menge  $\{p+1\}$  nach. Indlekofer [2] gab eine Reihe weiterer Beispiele für  $E$ -Mengen an.

Es scheint bislang nicht bemerkt worden zu sein, dass  $E$ -Mengen auch wie folgt charakterisiert werden können:

**Satz.** Eine Menge  $A \subset \mathbf{N}$  ist  $E$ -Menge genau dann, wenn jedes natürliche  $n$  in der Gestalt

$$n = a_1^{r_1} \cdots a_k^{r_k} \quad (k \in \mathbf{N}_0; a_1, \dots, a_k \in A; r_1, \dots, r_k \text{ rational}) \quad (1)$$

geschrieben werden kann.