Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 33 (1978)

Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

erzeugt wird. Nach unserer Annahme ist U ein echter Unterraum von V, denn nicht für alle $n \in \mathbf{N}$ existiert eine Darstellung

$$\log n = r_1 \log a_1 + \cdots + r_k \log a_k \quad (a_1, \ldots, a_k \in A_0;\ r_1, \ldots, r_k \in \mathbf{Q}).$$

Jede Basis B_0 von U lässt sich zu einer Basis B von V ergänzen. Durch

$$\varphi(b) = \begin{cases} 0 & \text{für } b \in B_0, \\ 1 & \text{für } b \in B \setminus B_0 \end{cases}$$

wird eine lineare Abbildung von V in $\mathbf{Q}$ definiert, die nicht identisch verschwindet, für die aber $\varphi(U) = \{0\}$ gilt. Da sich für jedes $n \in \mathbf{N}$ genau eine Darstellung

$$\log n = r_1 b_1 + \cdots + r_k b_k \quad (b_1, \ldots, b_k \in B;\ r_k, \ldots, r_k \in \mathbf{Q})$$

finden lässt, wird durch

$$f(n) = r_1 \varphi(b_1) + \cdots + r_k \varphi(b_k)$$

eine vollständig additive Funktion definiert. Es gilt aber

$$f(A_0) = \{0\}, \qquad f(\mathbf{N}) \neq \{0\},$$

was im Widerspruch zur Annahme steht.

Dieter Wolke, TU Clausthal-Zellerfeld

LITERATURVERZEICHNIS

1 P. D. T. A. Elliott: A conjecture of Kátai. Acta Arith. *26*, 11-20 (1974).
2 K.-H. Indlekofer: On sets characterizing additive arithmetical functions. Math. Z. *146*, 285-290 (1976).
3 I. Kátai: On sets characterizing number-theoretical functions. Acta Arith. *13*, 315-320 (1968).
4 I. Kátai: On sets characterizing number-theoretical functions (II). Acta Arith. *16*, 1-4 (1968).

Aufgaben

Aufgabe 781. $A = (a + md)_{m=0,1,2,\ldots}$ sei eine arithmetische Folge mit $a, d \in N$. Man beweise:

a) Jedes Glied von A ist Anfangsglied unendlich vieler geometrischer Teilfolgen von A mit ganzzahligen, paarweise teilerfremden Quotienten.

b) Jedes Glied von A ist Anfangsglied unendlich vieler Teilfolgen von A, von denen jede die Partialsummenfolge einer geometrischen Folge mit ganzzahligem Quotienten ist.

J. Binz, Bolligen

Lösung: a) Es seien $p_1, p_2, \ldots$ genau die nicht in d aufgehenden Primzahlen. Setzen wir $q_s = p_s^{\varphi(d)}$, unter φ die Eulersche Funktion verstanden, so gilt nach dem Euler-Fermatschen Satz: $q_s \equiv 1 \pmod d$, also $q_s^n \equiv 1 \pmod d$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und jeweils für $s = 1, 2, \ldots$ Die q_s sind paarweise teilerfremd. Sei nun b ein beliebiges Glied von A. Dann ist $bq_s^n \equiv a \pmod d$, also sind alle Folgen $(b, bq_s, bq_s^2, \ldots)$ geometrische Teilfolgen von A.

b) Sei b wieder ein beliebiges Glied von A und $q \in N$. Damit $(b, b+bq, b+bq+bq^2, \ldots)$ Teilfolge von A ist, ist notwendig, dass aq von d geteilt wird und daher, dass q von $d' = d/(a, d)$ geteilt wird, wobei (a, d) den g.g.T. von a und d bezeichnet. Sei daher $q_s = sd'$ $(s = 1, 2, \ldots)$; dann ist $b\,(1 + q_s + \cdots + q_s^n) \equiv a \pmod{\mathrm{d}}$ für $n = 0, 1, \ldots$, und die sämtlichen Folgen $(b, b+bq_s, b+bq_s+bq_s^2, \ldots)$ sind Teilfolgen von A mit der verlangten Eigenschaft. P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten P. Addor (Bern), L. Hämmerling (Aachen, BRD), P. Kiss (Eger, Ungarn), H.-J. Kleck (Bern), L. Kuipers (Mollens VS), M. Vowe (Therwil BL).

Aufgabe 782. Sind C_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ n nichtleere, kompakte und konvexe Polygone der Ebene, $A = \bigcup_{\nu=1}^{n} C_\nu$ ihre Vereinigungsmenge und $A^* = \operatorname{cmpl} A$ die Komplementärmenge, so soll p die Anzahl der abgeschlossenen, paarweise disjunkten und zusammenhängenden Teilmengen bedeuten, in die A zerlegbar ist, während p^* analog die Anzahl der offenen, paarweise disjunkten und zusammenhängenden Teilmengen bezeichne, in die A^* zerlegt werden kann. Man zeige, dass für die Komponentenzahlen p und p^* die Ungleichung

$$-(n-1)(n-2) \leqslant 2\,(p-p^*) \leqslant 2\,(n-1)$$

besteht. H. Hadwiger, Bern

Lösung: Setzt man $\chi := p - p^* + 1$, so ist χ gerade die Euler-Charakteristik von A. Die Behauptung lautet

$$1 - \binom{n-1}{2} \leqslant \chi \leqslant n.$$

Hierin ist die rechte Seite wegen $p \leqslant n$ und $p^* \geqslant 1$ trivial. Zum Beweis der linken Seite wenden wir Induktion nach n an. Der Fall $n = 1$ ist klar; sei also $n > 1$ und die Behauptung für $n - 1$ Polygone $C_1, \ldots C_{n-1}$ schon bewiesen. Bezeichnen χ', χ'' die Euler-Charakteristiken der Mengen

$$A' := C_1 \cup \cdots \cup C_{n-1}, \qquad A'' := (C_1 \cap C_n) \cup \cdots \cup (C_{n-1} \cap C_n),$$

so gilt aufgrund des Additionstheorems der Euler-Charakteristik:

$$\chi = \chi' - \chi'' + 1.$$

Aus der Induktionsannahme $\chi' \geqslant 1 - \binom{n-2}{2}$ und $\chi'' \leqslant n-1$ folgt nunmehr $\chi \geqslant 1 - \binom{n-1}{2}$, wie behauptet.

Bemerkungen: 1. Jede ganze Zahl χ, die der obigen Abschätzung genügt, kommt als Euler-Charakteristik vor. Gleichheit rechts bzw. links tritt genau dann ein, wenn keine zwei bzw. wenn je zwei, aber keine drei der Mengen C_i sich schneiden.
2. Die Behauptung gilt allgemeiner für Homologiezellen C_i mit der Eigenschaft, dass jeder nichtleere Durchschnitt $\cap C_{i_j}$ wieder eine Homologiezelle ist.

J. Eckhoff, Dortmund, BRD

Weitere Lösungen sandten W. Kühnel (Berlin), L. Kuipers (Mollens VS), P. Mürner (Oberhofen BE).

Problem 782A. Werden - in der Notation der Aufgabe 741 (El. Math. 30 (1975), S. 62) - die Mittelpunkte der Strecken A_1P_a, B_1P_b, C_1P_c in dieser Reihenfolge mit $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ bezeichnet, so gelten vermutlich die beiden folgenden Aussagen:
a) Das Dreieck $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ist zum Ausgangsdreieck ABC ähnlich.
b) Der Mittelpunkt des Feuerbachschen Neunpunktekreises im Dreieck ABC ist Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Hj. Stocker, Wädenswil ZH

Lösung: Setzt man jeweils die Spiegelung an

$$B'C', \qquad C'A', \qquad A'B'$$

und die zentrische Streckung mit dem Zentrum

$$A_1, \qquad B_1, \qquad C_1$$

und dem Streckungsfaktor $1/2$ zusammen, so ergeben sich drei gegensinnige Ähnlichkeiten, welche das Viereck $ABCP$ auf je eins der untereinander gleichsinnig kongruenten Vierecke

$$A_1C'B'\bar{A}, \qquad C'B_1A'\bar{B}, \qquad B'A'C_1\bar{C}$$

abbilden. Bei jeder dieser drei Ähnlichkeiten entspricht dem Umkreis u des Dreiecks ABC und dessen Mittelpunkt U der durch die Punkte $A', B', C', A_1, B_1, C_1$ gehende Feuerbachkreis u' und sein Mittelpunkt U'. Da hierbei die Strecke UP in die drei gleichlangen Strecken

$$U'\bar{A}, \qquad U'\bar{B}, \qquad U'\bar{C}$$

von der Länge $|UP|/2$ und der Winkel $\sphericalangle AUP$ in die zu ihm gegensinnig kongruenten Winkel

$$\sphericalangle A_1U'\bar{A}, \qquad \sphericalangle C'U'\bar{B}, \qquad \sphericalangle B'U'\bar{C}$$

übergehen, hat das Dreieck $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ den Umkreismittelpunkt U' und ist zum Dreieck $A_1B'C'$ gleichsinnig sowie zum Dreieck ABC gegensinnig ähnlich.

A. Reuschel, Wien, A

Weitere Lösungen sandten G. Bercea (München, BRD), K. Bickel, (Freiburg, BRD), C. Bindschedler (Küsnacht), J.T. Groenman (Groningen, NL), K. Grün (Linz, A, 2 Lösungen), J. Quoniam (Saint-Etienne, F).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. August 1978* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem* ... A, B bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

Aufgabe 798. A_1, A_2, A_3 seien die Ecken eines ebenen Dreiecks Δ. Auf den Verlängerungen seiner Seiten seien die Punkte $U_1, \ldots, U_6$ folgendermassen angenommen:

$$\begin{array}{llll} U_1, U_4 \text{ auf } A_2A_3, & |A_2U_1| = |A_1A_2|, & |A_3U_4| = |A_3A_1|, \\ U_2, U_5 \text{ auf } A_3A_1, & |A_3U_5| = |A_2A_3|, & |A_1U_2| = |A_1A_2|, \\ U_3, U_6 \text{ auf } A_1A_2, & |A_1U_3| = |A_3A_1|, & |A_2U_6| = |A_2A_3|. \end{array}$$

Ferner seien V_1, V_2, V_3 bzw. W_1, W_2, W_3 die Mittelpunkte der Seiten $\overline{U_2U_3}$, $\overline{U_1U_6}$, $\overline{U_4U_5}$ bzw. $\overline{U_5U_6}$, $\overline{U_3U_4}$, $\overline{U_1U_2}$ des so entstehenden Sechsecks $U_1 \cdots U_6$.

a) Man zeige, dass sich die Transversalen A_iV_i $(i = 1, 2, 3)$ in einem Punkt L und die Transversalen A_iW_i $(i = 1, 2, 3)$ in einem Punkt P schneiden.

b) Man zeige, dass L, P und der Inkreismittelpunkt I von Δ kollinear sind.

c) Man bestimme den Wertebereich des Teilungsverhältnisses $|LI|/|IP|$.

J.T. Groenman, Groningen, NL

Aufgabe 799. Es sei k eine natürliche Zahl und a eine reelle Zahl mit $a \geq e$. Man zeige: Zu jeder reellen Zahl x mit $x \geq (\log a)^k$ existiert eine natürliche Zahl m derart, dass

$$\frac{x}{2^{k+1}(\log ax)^k} < m \leq \frac{x}{(\log am)^k}.$$

L. Kuipers, Mollens VS

Aufgabe 800. Man zeige, dass für alle $n \in N \cup \{0\}$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^{-1} = \frac{n+1}{n+2}[1 + (-1)^n].$$

S. Gabler, Mannheim, BRD