Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 33 (1978)
Heft: 2

Artikel: Hamiltonwege in rechteckigen und quaderförmigen Gittergraphen
Autor: Binz, J.C.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32937

Elementarmathematik und Didaktik

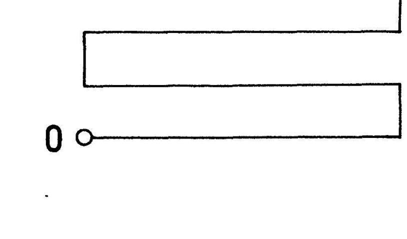
Hamiltonwege in rechteckigen und quaderförmigen Gittergraphen

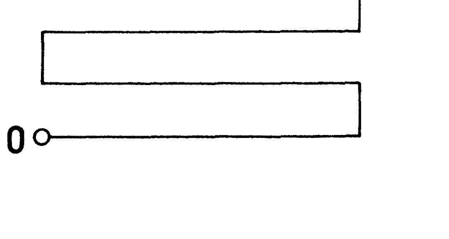
Hamiltonkreise und -wege in beliebigen Graphen sind zwar Gegenstand der mathematischen Forschung, in speziellen Fällen eignen sie sich aber gut als Objekte für «Kleinforschung» auf der Mittelschulstufe. Diese Notiz soll einige Anregungen für solche Studien bieten. Es werden für einfache Gittergraphen notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Hamiltonwegen angegeben.
Ein *Rechteckgraph* $G=G(a,b)$ hat als Knoten alle Gitterpunkte $p(m,n)$ mit $0\leq m\leq a$ und $0\leq n\leq b\,(a,b\geq 2)$ und als Kanten alle Punktepaare $\{p,q\}$, die sich in genau einer Koordinate um 1 unterscheiden. *Quadergraphen* $G(a,b,c)$ im dreidimensionalen Gitter sind auf analoge Art erklärt. Ein *Hamiltonweg* von p nach $q\,(p\neq q)$ ist ein Kantenzug in G, der in p beginnt, in q endet und jeden anderen Knoten von G genau einmal trifft. Wir sagen auch, q sei von p aus *H-erreichbar.* Wir suchen die Menge aller Knoten von G, die von 0 aus H-erreichbar sind.
Im zweidimensionalen Fall gilt

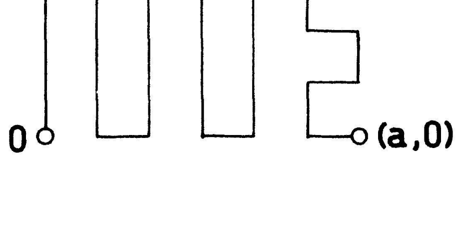
Satz 1. *Ein Knoten $p(m,n)$ des Rechteckgraphen $G(a,b)$ ist genau dann von 0 aus H-erreichbar, wenn entweder die Zahlen $m+n$, a, b gerade oder $m+n$ und mindestens eine der Zahlen a, b ungerade sind.*

Beweis: p sei von 0 aus H-erreichbar. Wir orientieren die Kanten des H-Weges W im Durchlaufsinn von 0 nach p. Von den h horizontalen Kanten von W sind h^+ nach rechts und h^- nach links orientiert; analog sind die Zahlen v, v^+ und v^- für die vertikalen Kanten von W erklärt. W besteht aus $k=(a+1)(b+1)-1$ Kanten. Es gelten die Beziehungen $h+v=k$, $h=h^++h^-$, $v=v^++v^-$, $h^+-h^-=m$, $v^+-v^-=n$. Daraus erhält man $k=m+n+2h^-+2v^-$ und liest daraus ab, dass k und $m+n$ von gleicher Parität sein müssen. Ist $m+n$ gerade, so müssen $k+1$ ungerade und damit a,b beide gerade sein; andernfalls wird $k+1$ gerade und somit mindestens eine der Zahlen a,b ungerade. Die Bedingungen des Satzes sind folglich notwendig. Dass sie auch hinreichend sind, weist man durch Konstruktion passender Wege nach. Wir geben zuerst H-Wege in die nach Satz 1 zulässigen «Nachbarecken» $(a,0)$, $(0,b)$ und in die «Diagonalecke» (a,b) an, und zwar an Beispielen, die offenbar für die allgemeinen Fälle repräsentativ sind (siehe [1]):

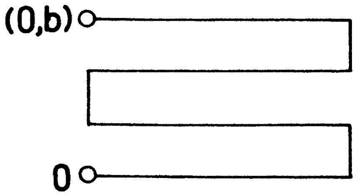
a,b gerade; alle Ecken zulässig.

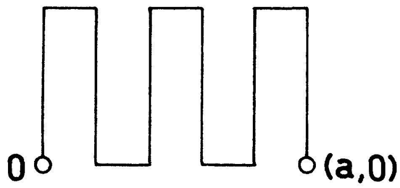




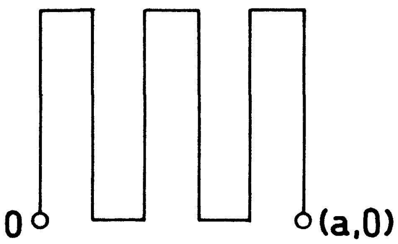


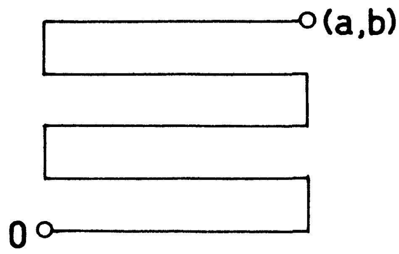
a, b ungerade; (a, b) nicht zulässig.





a ungerade, b gerade; $(0, b)$ nicht zulässig. (Analog bei vertauschter Parität.)

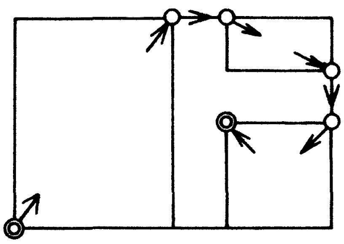




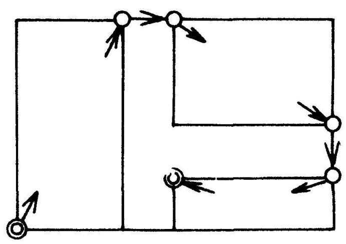
Liegt nun p nicht in einer Ecke, so führt man die Konstruktion auf die eben behandelten Spezialfälle zurück; dem Leser seien die Fälle überlassen, wo p auf dem Rand des Rechtecks liegt. Die in den untenstehenden Figuren nur angedeuteten H-Wege von Ecke zu Ecke der Teilrechtecke existieren jeweils nach dem bis jetzt bewiesenen Teil von Satz 1. Ist p nur um 1 vom Rand entfernt, so kann ein Teilrechteck in eine Strecke entarten, deren Endknoten aber stets H-verbindbar sind.

a, b gerade

m, n gerade

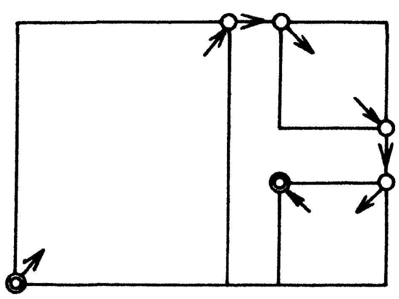


m, n ungerade

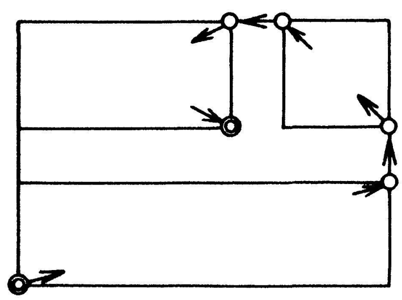


a, b ungerade

m ungerade, n gerade

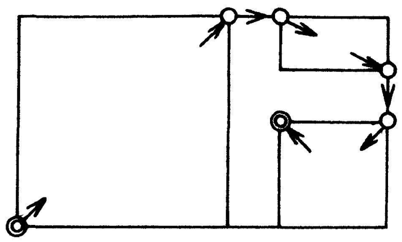


m gerade, n ungerade

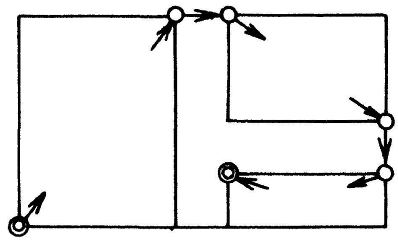


a ungerade, b gerade
(Analog bei vertauschter Parität)

m ungerade, n gerade



m gerade, n ungerade



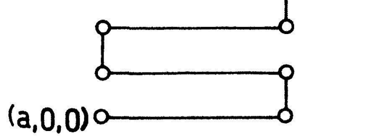
Die Bedingungen haben sich damit auch als hinreichend erwiesen.

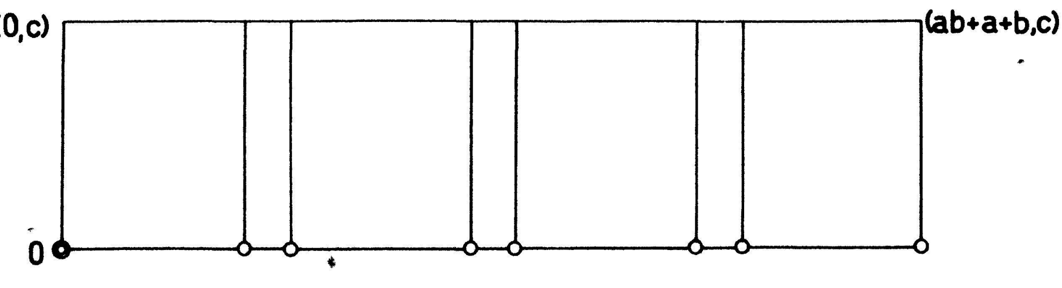
Als Korollar zu Satz 1 erhält man
Satz 2. *Im Rechteckgraphen $G(a,b)$ gibt es genau dann einen Hamiltonkreis, wenn mindestens eine der Zahlen a, b ungerade ist.*

Beweis: Ein Hamiltonkreis enthält den Kantenzug $i0j$ mit $i=(0,1), j=(1,0)$. Löscht man eine der Kanten $\{i,0\}$ oder $\{0,j\}$, so entsteht ein H-Weg von 0 nach j resp. i. In beiden Fällen ist $n+m=1$, und nach Satz 1 muss mindestens eine der Zahlen a,b ungerade sein. Umgekehrt lässt sich jeder H-Weg von 0 nach i oder nach j zu einem H-Kreis fortsetzen; ein solcher Weg existiert, wenn eine der Zahlen a, b ungerade ist.

Wenden wir uns jetzt den dreidimensionalen Quadergraphen zu! Hier gilt in völliger Analogie zu Satz 1
Satz 3. *Ein Knoten $p(m,n,r)$ des Quadergraphen $G(a,b,c)$ ist genau dann von 0 aus H-erreichbar, wenn entweder die Zahlen $m+n+r$, a, b, c gerade oder $m+n+r$ und mindestens eine der Zahlen a, b, c ungerade sind.*

Beweis: Der «nur dann»-Teil des Beweises verläuft wie der von Satz 1. Dagegen braucht man die Existenzbeweise nicht mehr in Analogie zum zweidimensionalen Fall zu führen. Dank der erhöhten «Bewegungsfreiheit» in der dritten Dimension gelingt es, alles auf die zweite Dimension zurückzuführen. Wir wickeln das Quadergitter gemäss untenstehender Grundrissfigur in die (y,z)-Ebene ab und erhalten den daneben dargestellten Rechteckgraphen $G'(ab+a+b,c)=G'(a',b')$.





Den Knoten $p(m, n, r)$ von G entsprechen dann umkehrbar eindeutig Knoten $p'(m', n')$ von G', und zwar gelten $n' = r, m' = m(b+1) + n$ für gerades m und $m' = m(b+1) + b - n$ für ungerades m. Diejenigen zur x-Achse parallelen Kanten von G, die bei der Abwicklung verlorengehen, werden zur Konstruktion der H-Wege gar nicht benötigt. Um nun die Existenz eines H-Weges von 0 nach p in G nachzuweisen, brauchen wir nur in G' einen H-Weg von 0 zum Bild p' zu finden. Wegen $(a'+1)(b'+1) = (a+1)(b+1)(c+1)$, $m' + n' = mb + m + n + r$ für gerades m und $m' + n' = (m+1)b - 2n + m + n + r$ für ungerades m stellen wir fest: Sind $m+n+r, a, b, c$ gerade, so auch $m'+n', a', b'$; sind $m+n+r$ und eine der Zahlen a, b, c ungerade, so auch $m'+n'$ und eine der Zahlen a', b'. Nach Satz 1 existiert in G' ein H-Weg von 0 nach p' und somit in G ein H-Weg von 0 nach p.

Ein Korollar zu Satz 3 ist

Satz 4. *Im Quadergraphen $G(a, b, c)$ gibt es genau dann einen Hamiltonkreis, wenn mindestens eine der Zahlen a, b, c ungerade ist.*

Der Beweis geht wie der von Satz 2.

Für die Schule kaum von Bedeutung, für den Lehrer aber vielleicht von Interesse ist die natürliche Verallgemeinerung der Sätze auf beliebige Dimensionen. Wir formulieren sie in

Satz 5. *Ein Knoten $p(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ des k-dimensionalen Quadergraphen $G(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ist genau dann von 0 aus H-erreichbar, wenn entweder die Zahlen $n_1 + n_2 + \cdots + n_k, a_1, a_2, \ldots, a_k$ gerade oder $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ und mindestens eine der Zahlen a_j ungerade sind.*

In G existiert genau dann ein Hamiltonkreis, wenn mindestens eine der Zahlen a_j ungerade ist.

Der interessierte Leser möge den Beweis selber führen. Als Hinweis sei einzig bemerkt, dass für den Existenzbeweis die gleiche Idee der «Abwicklung» in die Dimension $k-1$ zum Ziele führt, die wir beim Beweis von Satz 3 benützt haben; allfällige Schwierigkeiten bei der Durchführung sind rein formaler Art.

J. C. Binz, Universität Bern

LITERATURVERZEICHNIS

1 Gerald L. Thompson: Hamiltonian Tours and Paths in Rectangular Lattice Graphs. Math. Mag. *50*, 147–150 (1977).

On the constructibility of rational angles

Which angles can be constructed with a compass and straightedge? This paper answers the question in the case that the degree measure of the angle is a rational number.

Theorem. *Let the degree measure of an angle be p/q where p and q are relatively prime integers. This angle is constructible with a compass and straightedge if and*