

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 33 (1978)  
**Heft:** 4

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Anmerkung: Mit etwas verfeinerten Methoden lassen sich die Grenzen vermutlich wesentlich verbessern. Es spricht meines Erachtens einiges dafür, dass 3 jede unitär perfekte Zahl teilt.

Weitere Untersuchungen der Funktion  $\phi^u(n)$  – welche hier den Rahmen sprengen würden – führten mich zur Entdeckung einer fünften unitär perfekten Zahl – im Widerspruch zu einer Annahme der Autoren von [1], die besagt, dass wahrscheinlich keine unitär perfekte Zahl grösser als 87360 existiert.

Bisher bekannt waren  $6=2 \cdot 3$ ,  $60=2^2 \cdot 3 \cdot 5$ ,  $90=2 \cdot 3^2 \cdot 5$  sowie die schon genannte Zahl  $87360=2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ .

Die von mir gefundene unitär perfekte Zahl, von der ich nicht weiss, ob sie die nächste nach 87360 ist, ist

$$146361946186458562560000=2^{18} \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 79 \cdot 109 \cdot 157 \cdot 313.$$

H. A. M. Frey,  
HRZ Universität, Frankfurt a. M.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 M. V. Subbaro und L. J. Warren: Unitary perfect numbers. Can. Math. Bull. 9, 147–153 (1966).
- 2 P. Hagis Jr.: Unitary Amicable Numbers. Math. Comp. 25, 915–918 (1971).

## Aufgaben

**Aufgabe 789.** Es sei  $n$  ganz und nichtnegativ. Man zeige, dass sich  $4^n$  auf unendlich viele Arten als Differenz einer Quadratzahl und einer Trigonalzahl darstellen lässt. Ferner soll die Gesamtheit aller derartigen Darstellungen für den Fall angegeben werden, dass  $2 \cdot 4^{n+1} - 1$  eine Primzahl (Mersennesche Primzahl) ist.

E. Trost, Zürich

Lösung: Die Gleichung  $4^n = k^2 - \binom{m}{2}$  lässt sich in die Form  $2 \cdot 4^{n+1} - 1 = 8k^2 - (2m-1)^2$  bringen. Setzen wir  $p = 2 \cdot 4^{n+1} - 1$ ,  $v = 2k$  und  $u = 2m - 1$ , so erhält sie die Gestalt

$$u^2 - 2v^2 = -p. \tag{1}$$

$(u_0, v_0) = (1, 2^{n+1})$  ist eine Lösung von (1). Mit  $(u, v)$  ist auch  $(\bar{u}, \bar{v}) = (3u + 4v, 2u + 3v)$  eine Lösung; (1) hat somit unendlich viele Lösungen.

Ist  $p$  prim, so liefert die Theorie zur Gleichung (1) alle ihre Lösungen wie folgt (siehe [1], S. 204–212):

Die Lösungsschar zerfällt in zwei disjunkte Klassen mit den Basislösungen  $(u_0, v_0) = (1, 2^{n+1})$  und  $(u'_0, v'_0) = (4 \cdot 2^{n+1} - 3, 3 \cdot 2^{n+1} - 2) = (-3u_0 + 4v_0, -2u_0 + 3v_0)$ . Durch  $(u, v) = (xu^* + 2yv^*, yu^* + xv^*)$  erhält man alle übrigen Lösungen, indem man für  $(u^*, v^*)$  die beiden Basislösungen einsetzt und  $(x, y)$  alle positiven

Lösungen der Pell-Gleichung  $x^2 - 2y^2 = 1$  durchlaufen lässt. Somit wird die explizite Darstellung der beiden Lösungsscharen von (1)

$$\begin{aligned} u_i + v_i \sqrt{2} &= (u_0 + v_0 \sqrt{2}) (3 + 2\sqrt{2})^i, \\ u'_i + v'_i \sqrt{2} &= (u'_0 + v'_0 \sqrt{2}) (3 + 2\sqrt{2})^i. \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

Die Paare  $(k, m) = \left(\frac{v}{2}, \frac{u+1}{2}\right)$  sind dann die Lösungen des Ausgangsproblems für primes  $p$ .

Das Problem löst sich auf die genau gleiche Weise, wenn statt  $4^n$  eine beliebige Potenz  $s^{2n}$  für natürliches  $s$  vorgegeben ist. Wieder lässt sich die volle Lösungsmenge explizite angeben, wenn  $8 \cdot s^{2n} - 1$  eine Primzahl ist.

J. Binz, Bolligen BE

LITERATURVERZEICHNIS

1 T. Nagell: Introduction to Number Theory. John Wiley & Sons, Inc., New York 1951.

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht), J.T. Groenman (Groningen, NL), P. Kiss (Eger, Ungarn), L. Kuipers (Mollens VS), Schülerproblemgruppe (Bern-Kirchenfeld, Teillösung), M. Vowe (Therwil BL).

**Aufgabe 790.** Es sei  $S_k(n) := 1^k + 2^k + \dots + n^k$ ;  $k, n \in \mathbb{N}$ . Man bestimme alle  $k \in \mathbb{N}$ , für die folgende Aussage zutrifft: Es gibt ein Polynom  $P$  mit rationalen Koeffizienten sowie eine natürliche Zahl  $m \geq 2$  derart, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$ :  $S_k(n) = [P(n)]^m$ .

O. Buggisch, Darmstadt, BRD

1. Lösung: Wir bestimmen allgemeiner alle  $k \in \mathbb{N}$ , für welche es eine natürliche Zahl  $m \geq 2$  gibt derart, dass alle  $S_k(n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )  $m$ -te Potenzen rationaler (und deshalb natürlicher) Zahlen sind.

Aus der folgenden Tabelle der Potenzen  $n^k \pmod{8}$ :

$k \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	1	4	1	0	1	4	1	0
3	1	0	3	0	5	0	7	0
4	1	0	1	0	1	0	1	0
5	1	0	3	0	5	0	7	0
6	1	0	1	0	1	0	1	0

usw.

entnehmen wir, dass die Menge der Partialsummen  $S_k(n) \pmod{8}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , entweder die Menge  $\{0, 1, 4\}$  (für  $k \geq 3$  und  $k \equiv 1 \pmod{2}$ ) oder die Menge  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  (für alle übrigen  $k$ ) ist. Ferner ersehen wir aus der Tabelle, dass für  $m \geq 3$  und  $l \in \mathbb{Z}$  stets  $l^m \not\equiv 4 \pmod{8}$  ist. Daraus folgt  $m = 2$ . Aus  $S_k(2) = 1 + 2^k = a^2$  schliessen wir, dass  $a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1) = 2^k$ , d.h.  $a - 1$  und  $a + 1$

sind beides Potenzen von 2. Dies ist nur für  $a=3$  und  $k=3$  möglich. Bekanntlich gilt  $S_3(n) = (n^2/2 + n/2)^2$ .

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

2. Lösung: Einer Formelsammlung entnimmt man

$$S_k(n) = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + \frac{k}{12}n^{k-1} + \dots, \quad k \geq 2.$$

Durch Koeffizientenvergleich mit

$$\begin{aligned} [P(n)]^m &= (a n^r + b n^{r-1} + \dots)^m \\ &= a^m n^{rm} + m b a^{m-1} n^{r(m-1)} + \binom{m}{2} b^2 a^{m-2} n^{r(m-2)} + \dots \end{aligned}$$

ergeben sich mit  $rm = k + 1$  und  $m \geq 2$ :

$$a^m = 1/(k+1), \quad m b a^{m-1} = 1/2, \quad \binom{m}{2} b^2 a^{m-2} = k/12.$$

Man eliminiert  $a, b$  aus den ersten beiden Gleichungen und erhält aus der dritten

$$m = 3 - 6/(k+3),$$

was in natürlichen Zahlen nur die Lösung  $k=3, m=2$  zulässt. Die fragliche Aussage trifft also nur für  $k=2$  zu, auch dann, wenn nichtrationale Koeffizienten für  $P$  zugelassen werden.

H. Harborth, Braunschweig, BRD

Weitere Lösungen sandten P. Addor (Bern), C. Bindschedler (Küsnacht), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), A. Makowski (Warszawa, Polen), F. Matyas (Eger, Ungarn), M. Preda (Zürich), E. Teuffel (Korntal, BRD), M. Vowe (Therwil BL).

**Aufgabe 791.** Es sei  $t$  eine Tangente an die Ellipse, welche die Seiten des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  in ihren Mittelpunkten berührt (Steinersche Inellipse). Ferner seien  $K_1, K_2, K_3$  drei Kegelschnitte, von denen jeder zwei Seiten des Dreiecks in den Endpunkten der dritten Seite sowie die Gerade  $t$  berührt. Je zwei dieser drei Kurven schneiden sich ausser in einer Ecke  $A_i$  noch in genau einem weiteren reellen Punkt  $S_i$ . Man zeige, dass die Geraden  $A_iS_i, i=1,2,3$ , parallel sind.

C. Bindschedler, Küsnacht

**Lösung:** Wir benutzen trimetrische Normalkoordinaten in bezug auf das Fundamentaldreieck  $A_1A_2A_3$ , dessen Seitenlängen wir üblicherweise mit  $a_1, a_2, a_3$  bezeichnen. Dann ist

$$a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 - 2 a_1 a_2 x_1 x_2 - 2 a_2 a_3 x_2 x_3 - 2 a_3 a_1 x_3 x_1 = 0$$

die Gleichung der Steinerschen Inellipse, und die Bedingung, dass die Gerade  $t$ , dargestellt durch  $p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$  ( $p_1 p_2 p_3 \neq 0$ ), diese Ellipse berührt, lautet:

$$a_1 p_2 p_3 + a_2 p_3 p_1 + a_3 p_1 p_2 = 0. \quad (*)$$

Die Kegelschnitte  $K_1, K_2, K_3$  sind:

$$p_1^2 x_1^2 - 4 p_2 p_3 x_2 x_3 = 0, \quad p_2^2 x_2^2 - 4 p_3 p_1 x_3 x_1 = 0, \quad p_3^2 x_3^2 - 4 p_1 p_2 x_1 x_2 = 0.$$

Die Geraden  $A_i S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sind deshalb:

$$p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0, \quad p_2 x_2 - p_3 x_3 = 0, \quad p_3 x_3 - p_1 x_1 = 0.$$

Sie haben den Punkt  $(p_2 p_3, p_3 p_1, p_1 p_2)$  gemeinsam und sind also wegen (\*) parallel.

**Bemerkung:** Es gilt etwas allgemeiner folgender Satz. Es sei  $t$  eine Tangente an einen Kegelschnitt, welcher die Seiten des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  in den Punkten  $T_1, T_2$  und  $T_3$  berührt ( $T_i$  auf der  $A_i$  gegenüberliegenden Dreiecksseite;  $i = 1, 2, 3$ ). Es sei ferner  $C$  der gemeinsame Punkt der Geraden  $A_1 T_1, A_2 T_2$  und  $A_3 T_3$  und  $c$  die Harmonikale von  $C$  in bezug auf  $\Delta A_1 A_2 A_3$ . Es mögen weiter  $A_i S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die in der Aufgabe genannte Bedeutung haben. Dann besitzen die vier Geraden  $c$  und  $A_i S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) einen gemeinsamen Punkt.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht, 2. Lösung), J. T. Groenman (Groningen, NL), K. Grün (Linz, A), L. Kuipers (Mollens VS).

Vergl. auch die kleine Mitteilung von Bottema und Groenman auf S. 90–93 dieses Hefts.

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis *10. Februar 1979* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

**Aufgabe 807.** Man beweise für reelle  $x, y, s, t$  mit

$$0 \leq s \leq x \quad \text{und} \quad 0 \leq t \leq y$$

## die Ungleichung

$$\sinh x \sinh y \geq \min \{ \sinh(x-s) \sinh(y+t), \sinh(x+s) \sinh(y-t) \}$$

P. Buser, Bonn, BRD

**Aufgabe 808.** In einem Sehnenviereck seien über allen Seiten und Diagonalen als Durchmesser Kreise gezeichnet. Je zwei dieser Kreise sollen benachbart heißen, wenn sie sich in einem Eckpunkt des Vierecks schneiden. Man zeige, dass die insgesamt zwölf Schnittpunkte von je zwei benachbarten Kreisen (Eckpunkte nicht mitgezählt) je zu dritt auf vier konkurrenten Geraden liegen.

Hj. Stocker, Wädenswil

**Aufgabe 809.** Mit  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ ,  $x_i \in \mathbf{Z}$ , sei ein Punkt des  $k$ -dimensionalen Gitters bezeichnet. Im Gitterwürfel  $W_n^k := \{x \mid 1 \leq x_i \leq n\}$  sei eine Relation  $\rho^k$  wie folgt definiert:

$$x \rho^k y: \Leftrightarrow \begin{cases} \text{entweder: } x_i = y_i \ (1 \leq i \leq k-1) \ \text{und} \ x_k | y_k \\ \text{oder:} & \text{es gibt ein } m \text{ mit } m \leq k-1, \text{ so dass} \\ & x_m \neq y_m, \quad x_m | y_m \ \text{und} \ x_i = y_i \ \text{für } i < m. \end{cases}$$

a) Man beweise, dass  $(W_n^k, \rho^k)$  eine Halbordnung ist.

b) Es sei  $U$  die Menge der bezüglich  $\rho^k$  total ungeordneten Teilmengen  $U$  von  $W_n^k$ . Man bestimme  $v_n^k = \max_{U \in U} \text{card } U$ .

J. Binz, Bolligen

## Literaturüberschau

G. Žwas und S. Breuer: Computational Mathematics. 230 Seiten. US\$ 10.50. University Publishing Projects Ltd., Tel Aviv 1975.

Das Buch eignet sich - vorwiegend im ersten der beiden Teile - für Mittelschüler der letzten zwei Jahre vor der Maturität.

Die Autoren schlagen eine Brücke von der mathematischen Anwendung zur Theorie. Vor ein konkretes Problem gestellt, lernt der Leser Methoden der Mathematik kennen und diskutieren. Die Übungen bilden eine willkommene Ergänzung.

Im ersten Teil werden die sechs folgenden Themenkreise anschaulich beschrieben und die gestellten Probleme bis zu einem Berechnungsplan geführt: Berechnung der Zahl  $e$ , Lösen von Gleichungen, Flächenberechnungen, Berechnungen der Zahl  $\pi$ , Lineare Gleichungssysteme, Approximationen durch Polynome.

Jedem Kapitel des ersten Teils entspricht ein Kapitel des zweiten Teils mit den theoretischen Grundlagen und mit Erweiterungen. Diese geschickte Art der Einteilung, die den Einstieg wesentlich erleichtert und dann das Interesse für die Theorie weckt, ist für den Rezensenten neu; er hat mehrere Kapitel des ersten Teils in einem Computerpraktikum mit gutem Erfolg ausprobiert.

J. Zinn

Georg Unger: Das offenbare Geheimnis des Raumes. 2., überarbeitete Auflage. 72 Seiten mit 110 Zeichnungen, 4 Photographien und 8 Tafeln. Fr. 18.80. Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1975.

Die Gesamtheit der Symmetrien des Raumes, die sich formal als Ikosaedergruppe beschreiben lässt, kann man das «Geheimnis des Raumes» nennen. Es offenbart sich z.B. an den regulären Körpern. Das Auftreten der Zahlen 3 und 4 ist am Würfel leicht ersichtlich. Der Zusammenhang mit den Zahlen 5 und 6 ist es schon weniger. Der Maler und Plastiker Carl Kemper hat sich auf seine Weise mit diesen Fragen befasst und kam auf die Idee, nach «regelmässigen» Anordnungen von Ebenen durch einen Punkt zu