

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 33 (1978)
Heft: 6

Artikel: Über die Flächeninhalte ebener Schnitte konvexer Körper
Autor: Iseli, Marcel
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-32946>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 33

Heft 6

Seiten 129–160

10. November 1978

Über die Flächeninhalte ebener Schnitte konvexer Körper

Herrn Professor H. Hadwiger zum 70. Geburtstag gewidmet

1. Unter diesem Titel erschien bereits eine Note von H. Hadwiger¹⁾, der das vorliegende Ergebnis im dreidimensionalen euklidischen Raum aufzeigte.

Es sei also A ein eigentlicher Eikörper, das heisst eine kompakte, konvexe Menge mit inneren Punkten, des k -dimensionalen euklidischen Raumes E^k ($k \geq 2$). $V = V(A) > 0$ und $F = F(A) > 0$ zeigen dann Volumen und Oberfläche von A an; dabei hat der Quotient

$$Q = Q(A) = Q(V, F) := \frac{k^k \omega_k V^{k-1}}{F^k} \quad (1.1)$$

die isoperimetrische Ungleichung $0 < Q \leq 1$ zu erfüllen, wobei Gleichheit genau dann erreicht wird, wenn A eine Kugel ist.

$$\omega_k = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(1 + k/2)}$$

bezeichnet das Volumen der k -dimensionalen Einheitskugel.

Es sei $o \in E^k$ ein fester Ursprung. Punkte $x \in E^k$ sollen gleich bezeichnet werden wie ihre in o angreifenden Ortsvektoren. Ein Einheitsvektor $u \in E^k$ kennzeichne eine Richtung u im Raum. Für eine reelle Zahl t ist mit

$$E_{u,t} := \{x \in E^k; \quad \langle x, u \rangle = t\} \quad (1.2)$$

eine auf u orthogonal stehende Ebene, das heisst ein $(k-1)$ -dimensionaler Teilraum des E^k , gegeben; dabei weist die Winkelklammer auf die Bildung des Skalarprodukts hin.

Es sei $C \subset E^k$ ein ebener Eibereich, das heisst eine kompakte, konvexe Punktmenge in einem $(k-1)$ -dimensionalen Teilraum des E^k . $f = f(C) \geq 0$ zeige dann den $(k-1)$ -

1) Vgl. [1].

dimensionalen Flächeninhalt an, wobei für die leere Menge \emptyset $f(\emptyset) = 0$ gesetzt wird. Mit

$$f_u = f_u(A) := \text{Max} \{f(A \cap E_{u,t}); \quad -\infty < t < \infty\} \quad (1.3)$$

wird dann der maximale Schnittflächeninhalt von A zur Richtung u bezeichnet. Mit Hilfe der beiden Ansätze

$$c_k := \frac{k \omega_k}{2 \omega_{k-1}} > 1, \quad (1.4)$$

$$S_k(\Theta) := \int_0^\Theta \sin^k t \, dt \quad (0 < \Theta \leq \pi/2) \quad (1.5)$$

definieren wir zwei elementare, bijektive Funktionen $g, G: (0, \pi/2] \rightarrow (0, 1]$ durch

$$g(\theta) := c_k \frac{\{c_k + k \text{ctg } \theta\}^{k-1}}{\{c_k + (k-1) \text{ctg } \theta\}^k}, \quad (1.6)$$

$$G(\Theta) := c_k \frac{\{k S_k(\Theta)\}^{k-1}}{\{(k-1) S_{k-2}(\Theta)\}^k}. \quad (1.7)$$

Man beachte, dass sich damit einem Eikörper A , mittels des isoperimetrischen Quotienten $Q = Q(A)$, zwei Hilfswinkel

$$\theta = \theta(A) := g^{-1}(Q), \quad (1.8)$$

$$\Theta = \Theta(A) := G^{-1}(Q) \quad (1.9)$$

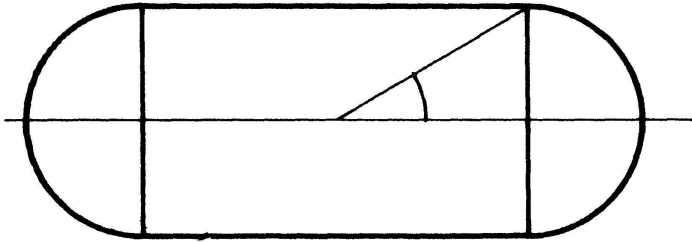
zuordnen lassen. Diese erreichen ihren Höchstwert $\theta = \Theta = \pi/2$ genau dann, wenn A eine Kugel ist.

Wir sind nun in der Lage, das Hauptergebnis der vorliegenden Untersuchung darzustellen:

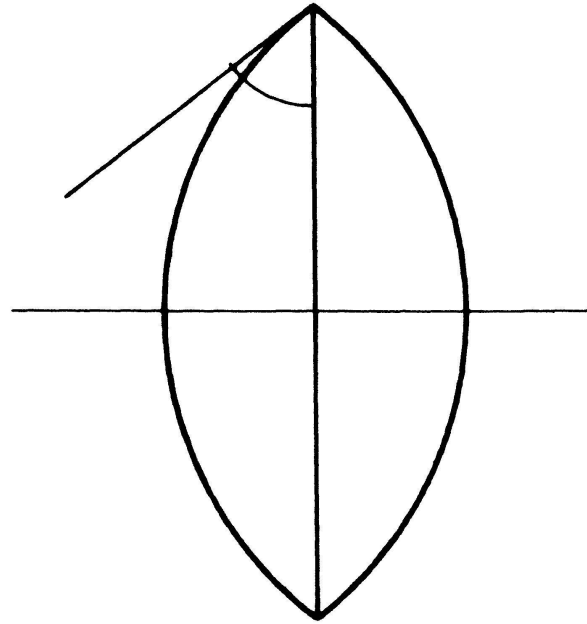
Für alle Richtungen u gilt für die maximalen Schnittflächeninhalte (1.3)

$$\frac{F}{2} \frac{1}{(c_k + (k-1) \text{ctg } \theta)} \leq f_u \leq \frac{F}{2} \frac{\sin^{k-1} \Theta}{(k-1) S_{k-2}(\Theta)}, \quad (1.10)$$

wobei θ und Θ die in (1.8) bzw. (1.9) festgelegten Hilfswinkel anzeigen. Gleichheit besteht auf der linken Seite für den Kugelzylinder und auf der rechten Seite für die symmetrische Kugellinse, falls die Rotationsachsen die Richtung u aufweisen. Dabei fallen die Hilfswinkel θ und Θ mit dem halben Zentriwinkel des Kugelzylinders und dem halben Scheitelwinkel der symmetrischen Kugellinse zusammen. Die Figuren 1 und 2 zeigen uns die beiden Extremalkörper in ihrem Meridiankurvenbild:



Figur 1



Figur 2

Im Grenzfall $\theta = \Theta = \pi/2$ erscheinen diese beiden Körper als Kugel mit Radius a ! Gehen wir andererseits von der Menge aller Eikörper mit vorgeschriebenen positiven Volum- und Oberflächenmasszahlen aus, dann nimmt der maximale Schnittflächeninhalt, der sich innerhalb einer Schar von parallelen Schnittebenen ergibt, den kleinstmöglichen Wert beim Kugelzylinder und den grösstmöglichen Wert bei der symmetrischen Kugellinse an, wobei die extremale Schnittrichtung parallel zur Rotationsachse zu nehmen ist.

Das Resultat (1.10) lässt sich daher auch wie folgt formulieren:

$$\inf_A \inf_u \{f_u(A); \quad V(A) = V, \quad F(A) = F\} = \frac{F}{2} \frac{1}{(c_k + (k-1) \operatorname{ctg} \theta)}, \quad (1.11)$$

$$\sup_A \sup_u \{f_u(A); \quad V(A) = V, \quad F(A) = F\} = \frac{F}{2} \frac{\sin^{k-1} \Theta}{(k-1) S_{k-2}(\Theta)}. \quad (1.12)$$

Dabei bezeichnen A einen Eikörper, u eine Richtung, $f_u(A)$ den maximalen Schnittflächeninhalt von A zur Richtung u , θ bzw. Θ die beiden nach (1.8) bzw. (1.9) definierten Hilfswinkel.

Man beachte, dass (1.12) gleichwertig ist mit dem grösstmöglichen Schnittflächeninhalt, der sich innerhalb der möglichen Schnitte von Ebenen in beliebiger Lage mit Eikörpern der Masszahlen V und F ergibt.

Wir werden nun in den folgenden 3 Abschnitten die Aussage (1.10) nachweisen.

2. Zunächst klären wir die Frage nach dem Gleichheitszeichen ab.

a) A sei ein Kugelzylinder der Achsenrichtung u mit Äquatorradius a und halbem Zentriwinkel $\theta, 0 < \theta \leq \pi/2$, vergleiche dazu Figur 1. Die für uns wichtigen Masszahlen sind:

$$V = \frac{(c_k + k \operatorname{ctg} \theta)}{c_k} \omega_k a^k$$

$$F = \frac{(c_k + (k-1) \operatorname{ctg} \theta)}{c_k} k \omega_k a^{k-1}.$$

Damit folgt aber sofort

$$f_u = \omega_{k-1} a^{k-1} = \frac{F}{2(c_k + (k-1) \operatorname{ctg} \theta)} \quad (2.1)$$

und somit Übereinstimmung mit der linken Seite von (1.10).

b) A sei eine symmetrische Kugellinse der Achsenrichtung u mit Äquatorradius a und halbem Scheitelwinkel θ , $0 < \theta \leq \pi/2$, vergleiche dazu Figur 2. Die gültigen Werte sind²⁾:

$$V = \frac{k S_k(\theta)}{c_k \sin^k \theta} \omega_k a^k$$

$$F = \frac{(k-1) S_{k-2}(\theta)}{c_k \sin^{k-1} \theta} k \omega_k a^{k-1}.$$

Daraus ergibt sich

$$f_u = \omega_{k-1} a^{k-1} = \frac{F}{2} \frac{\sin^{k-1} \theta}{(k-1) S_{k-2}(\theta)}, \quad (2.2)$$

womit die Gleichheit auf der rechten Seite von (1.10) bestätigt wird.

3. Es sei $A \subset E^k$ ein beliebiger eigentlicher Eikörper und u eine beliebig gewählte Richtung. A_0 bezeichne nun einen Rotationskörper mit der zu u parallelen Rotationsachse durch o , der sich wie folgt auszeichnet: Für jede reelle Zahl t soll die zu u orthogonal stehende Ebene $E_{u,t}$ A_0 genau dann treffen, wenn sie auch A trifft, und es soll dabei stets $f(A_0 \cap E_{u,t}) = f(A \cap E_{u,t})$ gelten. Bei dieser Körperbildung $A \rightarrow A_0$ handelt es sich um die bekannte Schwarzsche Abrundung³⁾, die die Konvexität, das Volumen V und den maximalen Schnittflächeninhalt f_u invariant lässt, die Oberfläche F aber nicht vergrößert. Betrachten wir dazu die zu beweisende Aussage (1.10), so stellen wir fest, dass damit bei der Verwandlung $A \rightarrow A_0$ die linke Seite der Ungleichung nicht kleiner wird – die partielle Ableitung fällt bei konstant gehaltenem Volumen negativ aus:

$$\frac{\partial}{\partial F} \frac{F}{2(c_k + (k-1) \operatorname{ctg} \theta)} = - \frac{1}{2 \operatorname{ctg} \theta} \quad (3.1)$$

2) Vgl. [2], 6.1.9; (69), S. 220.

3) Vgl. [3], Nr. 41, S. 71, 72.

– und somit bei einem Rotationseikörper mit Achsenrichtung u maximalen Wert annimmt. Analog weist die rechte Seite der Ungleichung (1.10) bei einem Rotations-eikörper der Achsenrichtung u minimalen Wert auf, da die entsprechende Ableitung sich als positiv erweist:

$$\frac{\partial F}{\partial F} \frac{1}{2} \frac{\sin^{k-1}\Theta}{(k-1)S_{k-2}(\Theta)} = \frac{1}{2 \cos \Theta}. \tag{3.2}$$

Damit ist unsere Aufgabe offensichtlich bereits dann gelöst, wenn das Bestehen der Ungleichung (1.10) für eigentliche Rotationseikörper der Achsenrichtung u sichergestellt ist.

4. Es seien u eine beliebig gewählte Richtung und $A \subset E^k$ ein beliebig vorgegebener Rotationseikörper mit Achsenrichtung u und dem Äquatorradius $a = a(A)$, das heisst dem Radius einer grössten Kugelscheibe ($(k-1)$ -dim. Kugel), die durch eine orthogonal auf u stehende Ebene aus A ausgeschnitten wird. $V = V(A)$, $F = F(A)$ und $f_u(A) = \omega_{k-1} a^{k-1}$ sind dann die zu A gehörigen Masszahlen. Mit $T_0 \subset E^k$ und $L_0 \subset E^k$ bezeichnen wir die – bis auf die Lage im Raum – eindeutig bestimmten Kugelzylinder und symmetrische Kugellinse der Achsenrichtung u , welche die Bedingungen

$$V(T_0) = V(L_0) = V, \quad F(T_0) = F(L_0) = F \tag{4.1}$$

erfüllen.

Nach einem bekannten Sachverhalt⁴⁾ bestehen die Ungleichungen

$$F(A) \geq \begin{matrix} F(T); & \omega_k a^k \leq V \\ F(L); & V \leq \omega_k a^k, \end{matrix} \tag{4.2}$$

wobei $T \subset E^k$ bzw. $L \subset E^k$ einen Kugelzylinder bzw. eine symmetrische Kugellinse anzeigen, für die $V(T) = V$, $a(T) = a$ bzw. $V(L) = V$, $a(L) = a$ ausfällt. Die Existenz dieser Hilfskörper T bzw. L ist durch die in (4.2) angebrachten Nebenbedingungen garantiert.

Es sei nun zunächst $\omega_k a^k \leq V$. Mit $V(L_0) = V$ gilt demnach $\omega_k a^k \leq V(L_0) \leq \omega_k a(L_0)^k$ oder also $a \leq a(L_0)$, somit

$$f_u(A) \leq f_u(L_0). \tag{4.3}$$

Andererseits ist mit (4.2) $F(T_0) = F(A) \geq F(T)$ und im Hinblick auf (3.1) also $f_u(T_0) \leq f_u(T)$ und wegen $f_u(T) = f_u(A)$ somit

$$f_u(T_0) \leq f_u(A). \tag{4.4}$$

4) Vgl. [2], 6.5.10; (203), (204), S. 283.

Verbinden wir (4.3) und (4.4) mit den Einsätzen (2.1) und (2.2), so resultiert die Behauptung (1.10).

Im verbleibenden Fall $V \leq \omega_k a^k$ lässt sich in analoger Weise auf (1.10) schliessen, womit der Beweis für das Hauptergebnis erbracht ist.

Marcel Iseli, Oberwangen¹⁾

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 H. Hadwiger: Über die Flächeninhalte ebener Schnitte konvexer Körper. *El. Math.* 30, 97–102 (1975).
- 2 H. Hadwiger: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin 1957.
- 3 T. Bonnesen und W. Fenchel: Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934.

On a statistical approach to Bertrand's problem

Dedicated to Prof. H. Hadwiger on the occasion of his 70th birthday

Probability theory is the branch of mathematics which constructs and analyzes mathematical models for random phenomena. In the early stages of the examination of such a phenomenon there are usually different mathematical models conceivable, each one of them representing a possible explanation of our empirical observations. Statistical methods may then be applied to evaluate the appropriateness of these models and to help decide which one of them should be adopted. It is the purpose of this note to demonstrate on a particular example the usefulness of statistical methods for the treatment of geometrical stochastics, i.e. of their applications to the analysis of randomly generated sets.

The example to be discussed is the following: Denote by E^2 a Euclidean plane with an origin Z and a system of Cartesian x - y -coordinates, by $G(q, \theta)$ [$0 \leq q < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$] the straight line in E^2 whose distance from Z is q and whose angle, formed by the perpendicular on G through Z and the x -axis, is θ , and by C_1 and C_2 the two circle-lines in E^2 with the same centre Z and radius 1 and $1/2$, respectively. Let (\mathcal{Q}) be a random vector whose components take values in the above specified ranges according to a density function h . It is of interest to calculate

$${}_h P := \Pr(G(Q, \Theta) \cap C_2 \neq \emptyset \mid G(Q, \Theta) \cap C_1 \neq \emptyset; h)$$

the probability that the random straight line $G(Q, \Theta)$ intersects C_2 conditionally on it intersecting C_1 . The result is given by the formula

$${}_h P = \left[\int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} h(q, \theta) d\theta dq \right] \cdot \left[\int_0^1 \int_0^{2\pi} h(q, \theta) d\theta dq \right]^{-1} \quad (*)$$

1) Bemerkung der Redaktion: Der Verfasser dieser Note, ein hochbegabter Schüler von Prof. Hadwiger, ist am 12.5.78, etwas mehr als ein Jahr nach seiner Diplomierung, nach schwerer Krankheit gestorben.