

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 36 (1981)
Heft: 1

Artikel: Zur Methode der finiten Elemente
Autor: Schwarz, H.R.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-35541>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 36

Heft 1

Seiten 1–24

Basel, 10. Januar 1981

Zur Methode der finiten Elemente

1. Allgemeiner Überblick

Vor rund 25 Jahren haben die Ingenieure begonnen, die Methode der finiten Elemente zu entwickeln, da sie recht komplexe Strukturen der modernen Technik entweder hinsichtlich ihrer statischen Sicherheit unter dem Einfluss von äusseren Belastungen oder aber auf ihre dynamischen Eigenschaften, d. h. beispielsweise auf ihre Eigenschwingungen, zu untersuchen hatten. Man denke hierbei etwa an moderne Dachkonstruktionen von Stadien, hohe Antennenmasten, Schiffs- und Flugzeugkonstruktionen, Staumauern, gewagte Brückenkonstruktionen im Autobahnbau, Atomreaktoren mit Sicherheitsbehältern, Hochleistungsturbinen und ähnliche weniger spektakuläre technische Errungenschaften, denen wir im täglichen Leben begegnen. Alle diese Entwicklungen wären ohne entsprechende verantwortungsbewusste und fachgerechte Berechnungen mit Hilfe von modernen Rechenanlagen schlechthin nicht denkbar.

Um die zugrundeliegende Idee der Methode zu verstehen, muss man sich die Tatsache vergegenwärtigen, dass sich die Konstruktion in einigen der erwähnten Fälle aus vielen einzelnen Bauteilen, z. B. Stäben, Balken oder Platten, zusammensetzt, deren elastomechanisches Verhalten unter Belastung der Ingenieur aufgrund bekannter Grundprinzipien der Mechanik beschreiben kann und somit vollkommen beherrscht. Es entspricht deshalb einem ganz natürlichen Vorgehen, die zu untersuchende Struktur in ihre Bestandteile zu zerlegen, welche fortan als die *Elemente* bezeichnet werden, um so die komplexe Aufgabe in mathematischer Manier auf die Behandlung der einzelnen Teile zurückzuführen. Bei anderen Problemstellungen, denen kontinuierliche räumliche Gebilde zugrunde liegen, zerlegt der Ingenieur in Verallgemeinerung der Idee die gegebene Struktur geeignet in solche Elemente, die er nach Prinzipien der Mechanik zu behandeln weiss, womit er wiederum die komplizierte Problemstellung auf einfachere und lösbare Aufgaben zurückführt.

Der beschriebene technische Hintergrund macht verständlich, dass die Methode der finiten Elemente sowohl im Gebiet des Bauwesens und des Maschinenbaus als auch im Bereich der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen ihre grösste Verbreitung gefunden hat und dass sie für die praktischen Zwecke laufend verbessert und verfeinert wird.

Das Verfahren der finiten Elemente ist unter dieser Bezeichnung etwas später auch zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen und von Systemen von partiellen Differentialgleichungen verwendet worden und hat so in diesem mehr

mathematisch orientierten Bereich Einzug gehalten. Als typische Aufgabenstellungen seien hier die elliptischen Rand- und Eigenwertprobleme, die Wärmeleitung oder Diffusion und Probleme der Strömungsmechanik genannt. Die prinzipielle Idee der Methode besteht darin, das Grundgebiet der Aufgabe in geeignet gewählte Teilgebiete, auch wieder Elemente genannt, zu unterteilen, um in diesen die gesuchte Funktion, bzw. die gesuchten Funktionen, durch einfache Funktionen in einem zu präzisierenden Sinn möglichst gut zu approximieren. Als Approximationsfunktionen in den einzelnen Elementen werden in der Regel Polynome so gewählt, dass die solcherart zusammengesetzte Näherungsfunktion im ganzen Grundgebiet die erforderlichen Stetigkeitseigenschaften besitzt.

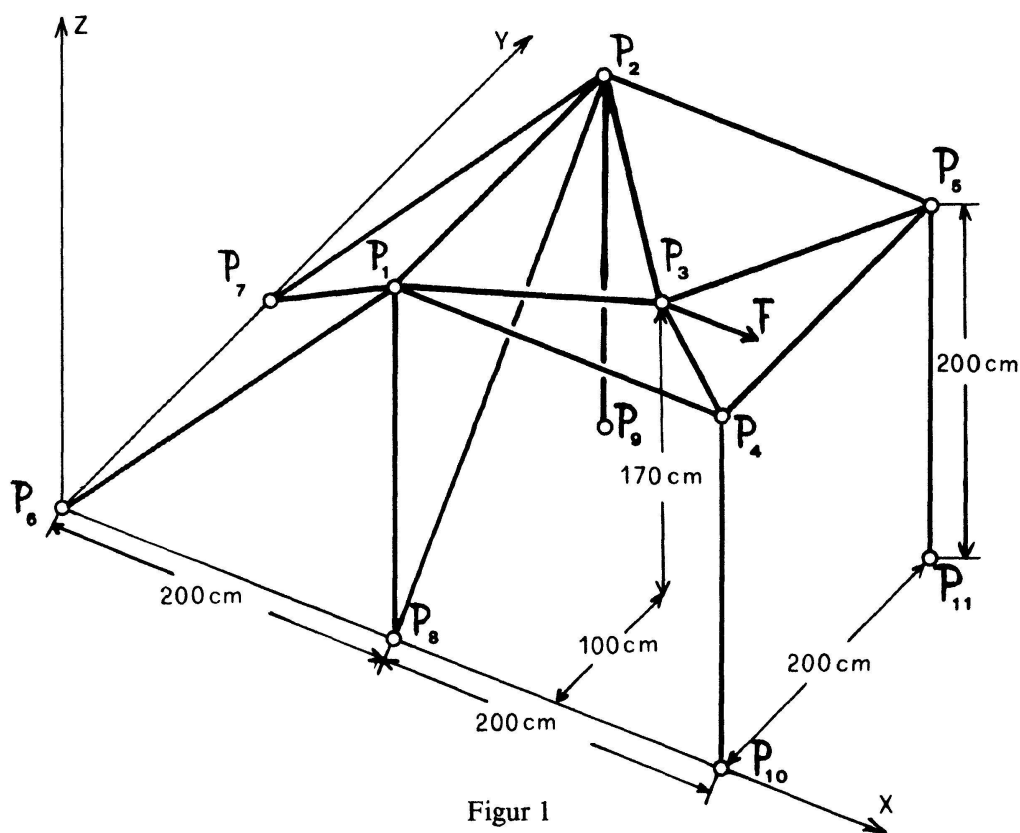
Die skizzierte Idee des Verfahrens ist wohl zum ersten Mal 1928 in [4] erwähnt und dann 1943 in [5] mit einem konkreten Vorschlag für die Durchführung dargestellt worden. Die grundlegende Idee ist aber auch 1938 in [3] für theoretische Zwecke angewandt worden. Der Verfasser lernte eine konkrete Anwendung 1954 in einer eindrucklichen Vorlesung von G. Pólya über Variationsprinzipien kennen, in welcher vermöge komplementärer Extremalprinzipien nach dieser Methode obere und untere Schranken für die Kapazität oder Torsionssteifigkeit berechnet wurden [6, 7]. Diese Ansätze scheinen zu jener Zeit wenig beachtet worden zu sein. Erst das Aufkommen von leistungsfähigen Rechenanlagen verhalf der Methode zum Durchbruch.

Die Methode der finiten Elemente besitzt zwei verschiedene Gesichtspunkte, welche miteinander ein vollständiges Bild ergeben, sich aber infolge ihrer vollkommen gegensätzlichen Zielsetzungen nur schwer vereinigen lassen. Der Praktiker, der die konkrete Lösung eines Problems in Form von Zahlwerten anstrebt, ist an den erforderlichen theoretischen Grundlagen und an den algorithmischen Fragen für eine zweckmässige, effiziente und numerisch sichere Durchführung der Methode interessiert. Demgegenüber befassen sich seit etwa gut zehn Jahren viele Mathematiker mit theoretischen Fragestellungen, welche die Existenz und Eindeutigkeit der Näherungslösung, die Konvergenz der Näherungslösung bezüglich einer Norm bei Verfeinerung der Elemententeilung gegen die exakte Lösung oder die Zulässigkeit bestimmter Ansätze überhaupt betreffen. Gelegentlich liefern die theoretischen Untersuchungen Richtlinien für die praktische Durchführung, doch ist leider festzustellen, dass viele der zahlreichen abstrakten Publikationen kaum mehr eine Beziehung zu den für die Anwendung relevanten Fragestellungen haben.

Da der Anwendungsbereich der Methode der finiten Elemente sehr vielseitig ist, soll der Grundgedanke anhand eines einfachen und elementaren Beispiels aus dem Ingenieurwesen dargelegt werden. Die Darstellung erfolgt dabei unter dem algorithmischen, auf die praktische Durchführung ausgerichteten Aspekt, der hier ohnehin angebracht ist, da Fragen der Konvergenz ausser Diskussion stehen. Für eine entsprechend ausführliche Behandlung der Methode in anderen Anwendungsgebieten sei auf [9] verwiesen. Wer mehr an theoretischen Gesichtspunkten interessiert ist, sei etwa auf [1, 2, 8, 11] hingewiesen. In einem späteren Beitrag soll die Anwendung der Methode der finiten Elemente zur Lösung von elliptischen Randwertaufgaben dargestellt und auf einige reizvolle Probleme der Numerik der linearen Algebra eingegangen werden.

2. Ein Problem der Statik

Wir betrachten ein einfaches räumliches Fachwerk nach Figur 1, unter dem man sich konkret etwa die Bergstation eines Skiliftes vorstellen kann. Die Konstruktion baut sich aus 16 Stabelementen auf. Die sechs Fusspunkte der Konstruktion liegen vereinfachend in einer horizontalen Ebene, der (x,y) -Ebene des Koordinatensystems von Figur 1, und seien im Boden verankert. Die Verbindungsstellen bzw. die Fusspunkte der Konstruktion werden *Knotenpunkte* genannt. Sie sind in Figur 1 mit P_1 bis P_{11} bezeichnet. Im Knotenpunkt P_3 unterliegt die Konstruktion der einzigen äusseren Kraft F in x -Richtung, etwa verursacht durch das dort befestigte Umlenkrad.

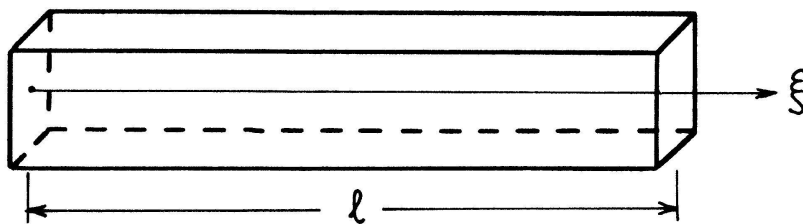


Die verwendeten Stabelemente sind so beschaffen, dass sie keine wesentlichen Biegemomente aufnehmen können, sondern dass sie allein zu berücksichtigenden Zug- oder Druckkräften unterworfen sind. Aufgrund dieser Annahme können in den Verbindungsstellen von Stabelementen auch keine wesentlichen Biegemomente übertragen werden, so dass demzufolge in allen Knotenpunkten eine gelenkige Verbindung bzw. Lagerung angenommen werden muss. Deshalb sind Verstrebungsstäbe, wie P_1P_2 und P_2P_8 , erforderlich, um der Konstruktion die seitliche Stabilität zu vermitteln. Die genannten Vereinfachungen für die Berechnung der Deformation und insbesondere der auftretenden Spannungen in den Stäben werden aber durch die Erfahrung voll gerechtfertigt.

Nach dieser allgemeinen Beschreibung der Problemstellung erfolgt die Mathematisierung der Aufgabe. In der Mechanik existiert eine Reihe von Prinzipien

oder Methoden, die Bedingungsgleichungen des vorgelegten Problems aufzustellen. Im folgenden soll das Prinzip des Minimums der gesamten potentiellen Energie eines Systems verwendet werden, welches besagt, dass die tatsächliche Deformation eines Körpers unter dem Einfluss von äusseren Kräften die gesamte potentielle Energie minimiert.

Die gesamte potentielle Energie der betrachteten Konstruktion setzt sich zusammen aus der Deformationsenergie der einzelnen Stäbe und dem Potential der äusseren Kräfte. Wir wenden uns zuerst dem Problem zu, die Deformationsenergie eines homogenen, isotropen Stabes konstanten Querschnitts A unter einer zunächst beliebigen Deformation in Stabrichtung zu beschreiben. Wir betrachten einen Stab der Länge l nach Figur 2, mit der ξ -Achse in Stabrichtung.



Figur 2

Falls $\hat{u}(\xi)$ die Verschiebung des Querschnittes an der Stelle ξ bedeutet, so wird die Deformationsenergie des Stabes unter Zugrundlegung der linearen Elastizitätstheorie gegeben durch [9]

$$I_{\text{STAB}} = \frac{1}{2} EA \int_0^l \hat{u}'(\xi)^2 d\xi, \quad (1)$$

wo E den Elastizitätsmodul des Materials bedeutet. Wirken auf den Stab nur Kräfte an den Stabenden in Stabrichtung, so stellt sich unter den Annahmen über den Stab eine linear variierende Verschiebung des Querschnittes ein. Bedeutet \hat{u}_1 die Verschiebung des linken und \hat{u}_2 die Verschiebung des rechten Endes des Stabes, so lässt sich die Verschiebung $\hat{u}(\xi)$ mit Hilfe linearer Interpolation darstellen als

$$\hat{u}(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \hat{u}_1 + \frac{\xi}{l} \hat{u}_2. \quad (2)$$

Mit

$$\hat{u}'(\xi) = (-\hat{u}_1 + \hat{u}_2)/l \quad (3)$$

ergibt sich somit für die Deformationsenergie (1) des Stabes

$$I_{\text{STAB}} = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} (\hat{u}_1^2 - 2\hat{u}_1\hat{u}_2 + \hat{u}_2^2). \quad (4)$$

Die Deformationsenergie ist somit eine quadratische Form in den beiden Verschiebungen \hat{u}_1 und \hat{u}_2 in Stabrichtung an den Stabendpunkten. Der Ausdruck (4) wird mit Hilfe von

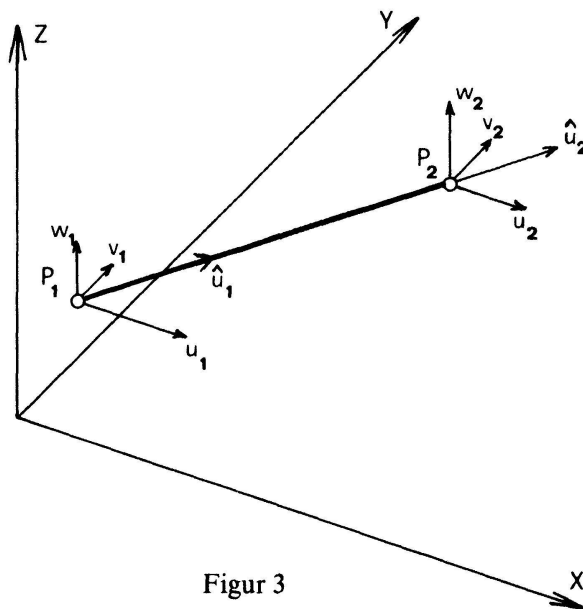
$$\hat{\mathbf{u}}_e = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{S}}_e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

geschrieben als

$$I_{\text{STAB}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_e^T \hat{\mathbf{S}}_e \hat{\mathbf{u}}_e. \quad (6)$$

Die Matrix $\hat{\mathbf{S}}_e$ bezeichnet man als die *Elementsteifigkeitsmatrix* eines Zugstabes. Der Vektor $\hat{\mathbf{u}}_e$ enthält die beiden den Deformationszustand charakterisierenden *Knotenvariablen* des Stabelementes und heisst Elementvektor. Der Faktor EA/l berücksichtigt die geometrischen und physikalischen Daten des Stabes.

Die vorhergehenden Betrachtungen dienen einzig der Vorbereitung, die Deformationsenergie eines Stabes in allgemeiner räumlicher Lage bei ebenfalls allgemeiner Verschiebung seiner beiden Endpunkte in den drei Koordinatenrichtungen aufzustellen. Dazu betrachten wir ein Stabelement nach Figur 3, dessen beide Endpunkte mit P_1 und P_2 bezeichnet sind, deren allgemeine räumliche Verschiebungen mit den Wertetripeln (u_1, v_1, w_1) bzw. (u_2, v_2, w_2) beschrieben werden. Diese Verschiebungen werden für das Folgende als klein vorausgesetzt im Verhältnis



Figur 3

zur Länge des Stabes, so dass die Richtung des Stabes in erster Approximation unverändert bleibt. Seien x_i, y_i, z_i die kartesischen Koordinaten des Punktes P_i ($i=1, 2$), dann sind die Richtungskosinus des Stabes gegeben durch

$$c_x = \frac{x_2 - x_1}{l}, \quad c_y = \frac{y_2 - y_1}{l}, \quad c_z = \frac{z_2 - z_1}{l}, \quad (7)$$

so dass sich die allein massgebenden Verschiebungen in Stabrichtung zu

$$\hat{u}_i = c_x u_i + c_y v_i + c_z w_i, \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

ergeben. Die lineare Relation (8) erlaubt nun, die Deformationsenergie eines Stabelementes in allgemeiner räumlicher Lage aus (6) herzuleiten vermöge der linearen Transformation

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Substitution von (9) in (6) und anschliessende Ausmultiplikation der Matrizen liefert schliesslich die Darstellung der Deformationsenergie in der Form

$$I_{\text{STAB}} = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z & -c_x^2 & -c_x c_y & -c_x c_z \\ c_x c_y & c_y^2 & c_y c_z & -c_x c_y & -c_y^2 & -c_y c_z \\ c_x c_z & c_y c_z & c_z^2 & -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 \\ \hline -c_x^2 & -c_x c_y & -c_x c_z & c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z \\ -c_x c_y & -c_y^2 & -c_y c_z & c_x c_y & c_y^2 & c_y c_z \\ -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 & c_x c_z & c_y c_z & c_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Die resultierende sechsstufige Elementsteifigkeitsmatrix ist symmetrisch, setzt sich aus vier dreireihigen, abgesehen vom Vorzeichen identischen, Untermatrizen zusammen, welche die räumliche Lage des Stabelementes berücksichtigen.

Die totale Deformationsenergie des Systems ergibt sich durch Addition über alle Stabelemente und ist offensichtlich eine quadratische Form in den Verschiebungen sämtlicher Knotenpunkte. Im konkreten Beispiel mit 11 Knotenpunkten ist dies eine quadratische Form in den 33 Knotenvariablen.

An dieser Stelle sollen die geometrischen Randbedingungen des Problems berücksichtigt werden. Aufgrund der Verankerung der Knotenpunkte P_6 bis P_{11} müssen die zugehörigen 18 Knotenvariablen verschwinden. Deshalb reduziert sich die totale Deformationsenergie auf eine quadratische Form in den 15 Knotenvariablen der Knotenpunkte P_1 bis P_5 . Fassen wir die 15 Knotenvariablen im Vektor $\mathbf{u} = (u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_5, v_5, w_5)^T$ zusammen, wobei sich die Indizierung der Verschiebungen auf die Knotenpunkte bezieht, so lautet die totale Deformationsenergie des Systems

$$I_{\text{SYS}} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{S} \mathbf{u}, \quad (11)$$

mit der *Gesamtsteifigkeitsmatrix* S der Ordnung 15. Die Matrix S baut sich aus den Matrizen in (10) unter Einschluss der i.a. elementabhängigen Faktoren EA/l additiv auf, wobei jedes Stabelement entsprechend seiner Endknotenpunkte nur Beiträge in die diesbezüglichen Stellen liefert.

Greift im Knotenpunkt P_i eine äussere Kraft F_i mit den Komponenten F_{ix} , F_{iy} , F_{iz} an, so lautet schliesslich die gesamte potentielle Energie des Systems mit dem Kraftvektor $F = (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}, \dots, F_{5x}, F_{5y}, F_{5z})^T$

$$\Pi_{\text{SYS}} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{S} \mathbf{u} - \mathbf{F}^T \mathbf{u}. \quad (12)$$

Die gesamte potentielle Energie (12) ist damit durch die freien und unbekannt-ten Verschiebungen von Knotenpunkten dargestellt. Sie nimmt für die tatsächliche Deformation des Systems ein Minimum an. Die notwendige Bedingung dafür besteht darin, dass der Gradient verschwindet, und führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\text{grad } \Pi_{\text{SYS}} = \mathbf{S} \mathbf{u} - \mathbf{F} = 0 \quad (13)$$

mit symmetrischer Koeffizientenmatrix S , welche aus physikalischen Gründen sogar positiv definit ist. Die gesuchten Verschiebungen der Knotenpunkte ergeben sich schliesslich als Lösungen von (13). Bei der praktischen Lösung des linearen Gleichungssystems kann die Symmetrie und positive Definitheit ausgenützt werden, da die Gaußsche Elimination mit Pivots längs der Diagonale ausführbar ist, wobei die Symmetrie erhalten bleibt und sich der erforderliche Rechenaufwand auf etwa die Hälfte reduziert im Vergleich zur Lösung eines allgemeinen Gleichungssystems [10].

Der prinzipielle Rechenablauf ist damit vollständig beschrieben. Er besteht grundsätzlich darin, aufgrund der Daten der einzelnen Stäbe die Gesamtsteifigkeitsmatrix S des linearen Gleichungssystems (13) aufzubauen, den Kraftvektor F als Konstantenkolonne in (13) zu definieren und das System zu lösen. Die sog. Kompilation der Matrix S übernimmt zweckmässigerweise ein Computerprogramm, das übrigens recht einfach ist. Als Grundlage für die Durchführung der Rechnung sind erstens die Koordinaten der Knotenpunkte und zweitens die Nummernpaare der Knotenpunkte sowie die Querschnittflächen der einzelnen Stäbe zusammenzustellen. Neben dem Wert für den Elastizitätsmodul E ist schliesslich noch F vorzugehen.

3. Beispiel

Zur Illustration soll die Deformation der Konstruktion der Figur 1 mit den dort angegebenen Abmessungen unter der Annahme bestimmt werden, dass alle Stäbe den gleichen Querschnitt $A = 5 \text{ cm}^2$ aufweisen, $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N cm}^{-2}$ sei und die einzige von Null verschiedene Kraftkomponente $F_{3x} = 10^5 \text{ N}$ betrage. Die Lösung des zugehörigen Gleichungssystems in 15 Unbekannten ist in der Tabelle zusammen

mit den zusätzlich berechneten Spannungswerten in einigen der Stäbe angegeben. Ein positiver Spannungswert entspricht einer Zugbeanspruchung, ein negativer Wert einer Druckspannung. Die Beanspruchung auf Zug und Druck entsprechen der Anschauung.

Deformationen und Spannungen.

Verschiebungen der Knotenpunkte [cm]				Spannungen [N cm ⁻²]	
<i>i</i>	<i>u_i</i>	<i>v_i</i>	<i>w_i</i>	Stab	<i>σ</i>
1	0,3719	0,2093	-0,1150	<i>P₆P₁</i>	12866
2	0,4070	0,1501	-0,1242	<i>P₁P₂</i>	-5917
3	0,5375	0,1608	0,0234	<i>P₂P₃</i>	7246
4	0,4219	0,1182	0,0150	<i>P₃P₄</i>	-7222
5	0,4570	0,1682	0,0150	<i>P₁P₄</i>	5006
				<i>P₁₀P₄</i>	1548
				<i>P₄P₅</i>	5000

H. R. Schwarz, Universität Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 J.P. Aubin: Approximation of elliptic boundary-value problems. Wiley, New York 1972.
- 2 Ph.G. Ciarlet: The finite element method for elliptic problems. North-Holland, Amsterdam 1978.
- 3 L. Collatz: Konvergenz des Differenzenverfahrens bei Eigenwertproblemen partieller Differentialgleichungen. Dt. Math. 3, 200-212 (1938).
- 4 R. Courant, K. Friedrichs und H. Lewy: Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. Math. Ann. 100, 32-74 (1928).
- 5 R. Courant: Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. Bull. Amer. Math. Soc. 49, 1-23 (1943).
- 6 G. Pólya: Sur une interprétation de la méthode des différences finies qui peut fournir des bornes supérieures ou inférieures. C.R. Acad. Sci., Paris 235, 995-997 (1952).
- 7 G. Pólya: Estimates for eigenvalues. Studies in Mathematics and Mechanics presented to R. von Mises, S.200-207. Academic Press, New York 1954.
- 8 P.M. Prenter: Splines and variational methods. Wiley, New York 1975.
- 9 H.R. Schwarz: Methode der finite Elemente. Teubner, Stuttgart 1980.
- 10 E. Stiefel: Einführung in die numerische Mathematik, 5. Aufl. Teubner, Stuttgart 1976.
- 11 G. Strang und G.J. Fix: An analysis of the finite element method. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.

Geometric aspects of linear transformations of the plane

The purpose of this note is to present some interesting and useful connections between plane geometry and linear transformations of the plane into itself. Of course, such linear transformations are most often given by 2×2 matrices. While our development does not easily extend into higher dimensional space, the two-dimensional case is already one of considerable practical importance. For example, in engineering mechanics the planar stress and strain tensors and the inertia tensor of a solid with a plane of symmetry are each represented by a 2×2 matrix.

The following notational conventions will be adopted. A linear transformation A of