Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 37 (1982)
Heft: 4

Rubrik: Aufgaben

Aufgaben

Aufgabe 863. Es sei K ein nicht notwendig kommutativer Körper, und a: $\{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\} \to K$ sei eine $(m \times n)$-Matrix über K. Ist r der Rechtsspaltenrang von a, so ist r bekanntlich auch der Linkszeilenrang von a (siehe etwa H. Lüneburg, Einführung in die Algebra, Satz V.3.7, S.215). Sind dann $X \subseteq 1,\dots,m\}$ und $Y \subseteq \{1,\dots,n\}$ Mengen der Länge r, so dass die Zeilen von a mit Indizes aus X linkslinear und die Spalten von a mit Indizes aus Y rechtslinear unabhängig sind, so gilt für die Einschränkung b von a auf $X \times Y$, dass ihr Rechtsspaltenrang gleich ihrem Linkszeilenrang gleich r ist. Ist K kommutativ, so ist also $\det(b) \neq 0$.

H. Lüneburg, Kaiserslautern, BRD

Lösung des Aufgabenstellers.

Beweis: Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $X = Y = \{1,\dots,r\}$ ist. Es sei a_i eine Zeile von a. Dann hängt a_i linkslinear von $a_1,\dots,a_r$ ab. Ist c_i die Einschränkung von a_i auf $Y = \{1,\dots,r\}$, so hängt c_i also linkslinear von $c_1,\dots,c_r$ ab. Wegen $c_i = b_i$ für $i = 1,\dots,r$ hängt c_i also linkslinear von $b_1,\dots,b_r$ ab. Nun sind die Spalten der Matrix c gerade die r ersten Spalten von a. Somit hat c den Rechtsspaltenrang r und damit den Linkszeilenrang r (Lüneburg, loc. cit.). Weil $b_1,\dots,b_r$, wie wir gerade sahen, ein Erzeugendensystem des von den Zeilen von c erzeugten Linksvektorraumes L ist und dieser Vektorraum den Rang r hat, ist $b_1,\dots,b_r$ eine Basis von L, q. e. d.

Aufgabe 864. Im ebenen Dreieck ABC mit $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ sowie $a < b$ seien die beiden durch A und B verlaufenden äusseren Winkelhalbierenden gleich lang.

1. Man zeige

(1.1) $a < c < b$, (1.2) $\gamma = \sphericalangle BCA < 60°$.

2. In bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem sei $P = (a, b)$. Welche Punktmenge durchläuft der Punkt P bei festem c und variablem γ?

L. Kuipers, Mollens VS

Lösung:
1. Wegen der bekannten Formeln

$$w'_A = 2\sqrt{bc(s-b)(s-c)}/|b-c| \quad \text{bzw.} \quad w'_B = 2\sqrt{ca(s-c)(s-a)}/|c-a|$$

für die durch A bzw. B verlaufende äussere Winkelhalbierende ist $w'_A = w'_B$ mit

$$c(c-a)(c-b) = ab(a+b-2c) \tag{$*$}$$

äquivalent, man beachte $s := (a+b+c)/2$ und $a < b$. Wäre nun $b \leqslant c$, so nach $(*)$

auch $2c \leqslant a+b \leqslant a+c$ entgegen $a<c$. Die Annahme $c \leqslant a$ führt wegen $(*)$ auf $c(a-c)(b-c)=ab(a+b-2c) \geqslant bc(c-c)$, also zu $a \geqslant b+c$, was ebenfalls nicht geht. Damit ist (1.1) bewiesen.
Da $(*)$ auch mit $c(3ab+c^2)=(ab+c^2)(a+b)$ und (1.1) mit $(c-a)(b-c)>0$ äquivalent ist, ist (1.1) gleichbedeutend mit $(a+b)^2 c > (ab+c^2)(a+b)=c(3ab+c^2)$, also mit $a^2+b^2-c^2>ab$; nach dem Kosinussatz ist dies äquivalent zu $\cos\gamma > 1/2$, also zu $0° < \gamma < 60°$, was (1.2) zeigt.
2. Nun sei $c>0$ festgehalten und γ laufe wie soeben angegeben; damit durchläuft $x:=2\cos\gamma$ das offene Intervall von 1 bis 2. Gefragt ist also nach den Paaren (a,b) mit $0<a<b$, die gleichzeitig $(*)$ und

$$c^2=a^2+b^2-xab, \qquad 1<x<2 \tag{$**$}$$

erfüllen. Um dieses Gleichungssystem zu lösen, wird $u:=ab>0, v:=a+b>c$ eingeführt. $(**)$ ist mit $(2+x)u=v^2-c^2$ äquivalent und $(*)$ mit $c^2(c-v)=u(v-3c)$. Erfüllen u,v die Gleichungen $(*)$, $(**)$, so muss $v=a+b$ offenbar $v^2-2cv+(x-1)c^2=0$ genügen, also muss sein

$$a+b=c\left(1+\sqrt{2-x}\right); \tag{$***$}$$

wegen $u=c^2(v-c)/(3c-v)$ muss weiter $ab=c^2\left(2-x+2\sqrt{2-x}\right)/(2+x)$ gelten. Dies und $(***)$ führen nach elementarer Rechnung zu

$$\left.\begin{matrix} a/c \\ b/c \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2-x}\right) \mp \left(\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{2-x}\right)^2 - \frac{1}{2+x}\left(2-x+2\sqrt{2-x}\right)\right)^{1/2},$$

$$1<x<2,$$

womit die fragliche Punktmenge $\mathscr{P}_c$ gefunden ist, allerdings in Parameterdarstellung. Hieraus erkennt man, dass $\mathscr{P}_c$ bei festem $c>0$ nichts anderes als der im vertikalen Halbstreifen $0<a<c, c<b$ der a,b-Ebene verlaufende Teil der algebraischen Kurve $(*)$ dritten Grades ist.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Anmerkung der Redaktion: J.T. Groenman (Groningen, NL) weist auf den Artikel von O. Bottema, De driehoek met twee gelijke bissectrices, Euklides 23 (1947), hin.

Weitere Lösungen sandten H. Egli (Zürich, Teillösung), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), W.A. van der Spek (Nordbergum, NL).

Aufgabe 865. ABC sei ein ebenes Dreieck mit Umkreis k, Feuerbachkreis k_F und Höhenschnittpunkt H. Ein Durchmesser d von k schneide die Geraden BC, CA, AB bzw. in A', B', C', und k_a, k_b, k_c seien die über den Strecken AA', BB', CC' gezeichneten Kreise. Man zeige
1. $k_a \cap k_b \cap k_c = \{U, V\}$ mit $\quad U \in k, \qquad V \in k_F$.

2. H, U, V sind kollinear.
3. Ist $k \cap UV = \{U, S\}$ und s die Simsongerade von S bez. ABC, so gilt: V ist Mittelpunkt von HS, $V \in s$ und $s \perp d$.

J.T. Groenman, Groningen, NL
D.J. Smeenk, Zaltbommel, NL

Lösung:
1. Es seien $A_1 = AM \cap k, B_1 = BM \cap k, C_1 = CM \cap k$. Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sind punktsymmetrisch bez. M, wobei M der Mittelpunkt von k ist. Nach [1] schneiden sich die Geraden A_1A', B_1B', C_1C' in einem Punkt U_1 auf k. Es sei $U = k_a \cap k$. Aus $\sphericalangle AUA' = \sphericalangle AUA_1 = 90°$ folgt, dass U auf A_1A' liegt, d.h.: $U \equiv U_1$.
Es seien A_2, B_2, C_2 die Seitenmitten des Dreiecks ABC; A_d der Fusspunkt von A auf d und V_1 das Spiegelbild von A_d bezüglich B_2C_2. V_1 ist der Orthopol von d bez. k ([2], 2.29), d.h., dieser Punkt liegt auf $k_F \cdot V_1$ liegt aber auch auf k_a, denn k_a ist wie A_d symmetrisch bez. B_2C_2. Es ist somit $V_1 \equiv V$.
2. Es sei A_3 der Höhenfusspunkt von A auf BC; $V_2 = UH \cap k_a$; $V_3 = UH \cap k_F$; $A_4 = AH \cap k_F$; $W = UH \cap k_F$. Bekanntlich gilt:

$$\overline{HA_4} = \overline{A_4A}, \qquad \overline{HW} = \overline{WU}. \tag{1}$$

Der Sekantensatz in k_a und k_F liefert:

$$\overline{UH} \cdot \overline{HV_2} = \overline{AH} \cdot \overline{HA_3}, \tag{2}$$

$$\overline{WH} \cdot \overline{HV_3} = \overline{A_4H} \cdot \overline{HA_3} \quad \text{oder mit} \quad (1)\text{: } \overline{UH} \cdot \overline{HV_3} = \overline{AH} \cdot \overline{HA_3}. \tag{3}$$

Aus dem Vergleich von (2) und (3) folgt: $\overline{HV_2} = \overline{HV_3}$, d.h. $V_2 \equiv V_3 \equiv V$. Die Punkte U, H, V sind somit kollinear.
3. Das Symmetriezentrum der Kreise k und k_F ist H, d.h. $\overline{HV} = \overline{VS}$, und bekanntlich ([2], 2.4) geht die Simsongerade von S bez. ABC durch die Mitte der Strecke HS, also durch V.
Die Simsongerade des Orthopols V bez. $A_2B_2C_2$ ist $\parallel d$ ([2], 2.30), d.h., auch die Simsongerade von S bez. $A_1B_1C_1$ ist $\parallel d$.
Das Dreieck $A_1B_1C_1$ ergibt sich aus ABC durch Halbdrehung um M. Daher bildet s mit der zu d parallelen Simsongeraden von S bez. $A_1B_1C_1$ einen Winkel von $180°/2 = 90°$ ([2], Umkehrung von 2.6).

G. Bercea, München, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

1 Aufgabe 761, 1.Lösung. El. Math *32*, 40–41 (1977).
2 T. Lalesco: La géometrie du triangle Paris (1937).

Weitere Lösungen sandten J.T. Groenman und G.R. Veldkamp (Groningen, NL), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), W.A. van der Spek (Nordbergum, NL), E. Ungethüm (Wien, A).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Februar 1983* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68). Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 882. Für $n=2$ und $n=3$ ermittelte man Lösungen $(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_n)\in\mathbf{C}^{2n}$ der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i/y_i)=\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

in Gestalt zyklischer Parameterdarstellungen, d. h.:

$$x_{\sigma(i)}=f(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(n)}),\qquad y_{\sigma(i)}=g(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(n)});\qquad i=1,\dots,n$$

für beliebige zyklische Permutationen σ der Indizes $1,\dots,n$.

I. Paasche, München, BRD

Aufgabe 883. Für komplexe z mit $|z|<1$ ist die Summe

$$\sum_{(m,n)=1} mn\,z^{m+n}(1+z^{m+n})(1-z^{m+n})^{-3},$$

erstreckt über alle Paare (m,n) teilerfremder natürlicher Zahlen geschlossen auszuwerten.

M. Bencze, Sàcele, Rumänien

Aufgabe 884. Für beliebige $x_{ik}\in\mathbf{R}$, $i=1,\dots,n$; $k=1,\dots,m$ zeige man, dass

$$\left\{\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{ik}\right)^2\right\}^{1/2}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}x_{ik}^2\right)^{1/2}.$$

Z. A. L. Geöcze, Viçosa, Brasilien

Mitteilung

5. Internationaler Kongress über Mathematikunterricht («ICME 5»)
Der von der Internationalen Mathematikunterrichts-Kommission organisierte Kongress «ICME 5» findet vom 24. bis 30. August 1984 an der University of Adelaide, Australien, statt.
Adresse für den Bezug von Unterlagen: ICME 5, Wattle Park Teacher's Center, 424 Kensington Road, Wattle Park, South Australia 5066.