

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 38 (1983)
Heft: 2

Artikel: Quadratsummen in Restklassenringen
Autor: Wegmann, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-37182>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Quadratsummen in Restklassenringen

In der Arbeit [1] hat kürzlich Laugwitz das folgende Problem behandelt und im wesentlichen gelöst: Sei \mathbf{Z} der Ring der ganzen Zahlen, sei $m \geq 2$ eine ganze Zahl und \mathbf{Z}_m der Restklassenring modulo m . Jedes Element $k \in \mathbf{Z}_m$ besitzt eine Darstellung

$$k \equiv x_1^2 + \dots + x_s^2 \pmod{m}$$

als Summe von Quadraten aus \mathbf{Z}_m . Bestimme die kleinste Zahl $s = s(k, m)$, mit der eine solche Darstellung möglich ist. Laugwitz [1] hat die Werte dieser Funktion $s(k, m)$ für fast alle Argumente k und m bestimmt. Er verwendete dabei die bekannten Sätze über die Darstellung ganzer Zahlen als Summe von Quadraten und den Satz von Dirichlet. Da es sich um ein Problem über Restklassenringe handelt, sollte es möglich sein, die Eigenschaften der Funktion $s(k, m)$ allein aus den Struktureigenschaften dieser endlichen Ringe zu erhalten. Ziel dieser Arbeit ist es, dies durchzuführen. Dabei lassen sich die wenigen in der Arbeit von Laugwitz offengebliebenen Fragen mit lösen.

1. Ergebnisse

Satz 1. $s(k, m) = \max_{p^a | m} s(k, p^a)$.

Satz 2. Sei $p > 2$, $0 < k < p^a$ und $k = p^{2b} k'$ mit $p^2 \nmid k'$.

Dann ist

$$s(k, p^a) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k' \text{ qu. Rest mod } p \\ 2 & \text{falls } k' \text{ qu. Nichtrest mod } p \\ 2 & \text{falls } p | k' \text{ und } p \equiv 1 \pmod{4} \\ 3 & \text{falls } p | k' \text{ und } p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Satz 3. Sei $0 < k < 2^a$ und $k = 4^b k'$ mit $4 \nmid k'$.

Dann ist $s(k, 2) = 1$, $s(k, 4) = k$ und

$$s(k, 2^a) = \begin{cases} 1 & 1 \\ 2 & \text{für } k' \equiv 2 \text{ oder } 5 \pmod{8} \\ 3 & 3 \text{ oder } 6 \\ 4 & 7 \end{cases}$$

2. Hilfsmittel aus der Zahlentheorie

A. Die Gruppe der primen Restklassen mod p ist zyklisch mit der Ordnung $p-1$. Die Quadrate bilden eine Untergruppe der Ordnung $(p-1)/2$.

- B. Der Rest -1 ist qu. Rest mod p , falls $p \equiv 1 \pmod{4}$ und qu. Nichtrest, falls $p \equiv 3 \pmod{4}$.
- C. Sei $p > 2$. Ist u mit $(u, p) = 1$ ein qu. Rest mod p , so auch mod p^a für alle $a \geq 1$.
- D. Die Gruppe der primen Restklassen mod 2^a ($a \geq 3$) besteht aus den Resten $\pm 5^i, i = 1, \dots, 2^{a-2}$. Die Quadrate sind die Reste $5^{2i}, i = 1, \dots, 2^{a-3}$, also die Reste $\equiv 1 \pmod{8}$.
- E. Der Restklassenring mod $m = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ ist isomorph zum direkten Produkt der Restklassenringe mod $p_i^{a_i}, i = 1, \dots, r$.

3. Beweise

Satz 1 ist eine Folgerung aus dem chinesischen Restklassensatz E.
 Für Details verweisen wir auf den Hilfssatz von Laugwitz [1].
 Die Beweise der Sätze 2 und 3 erfolgen in mehreren Schritten.

Hilfssatz 1

$$s(k, p^a) \geq s(k, p^b) \quad \text{für } a \geq b \tag{1}$$

$$s(p^2 k, p^a) \leq s(k, p^{a-2}) \quad \text{für } a > 2. \tag{2}$$

Beweis trivial.

Hilfssatz 2

$$s(k, p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0 \text{ oder qu. Rest} \\ 2 & \text{qu. Nichtrest} \end{cases} \tag{3}$$

$$s(k, 8) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \equiv 1 \pmod{8} \\ 2 & \text{falls } k \equiv 2 \text{ oder } 5 \pmod{8} \\ 3 & \text{falls } k \equiv 3 \text{ oder } 6 \pmod{8} \\ 4 & \text{falls } k \equiv 7 \pmod{8} \end{cases} \tag{4}$$

Beweis von (3): Sei k qu. Nichtrest. Unter den $(p+1)/2$ verschiedenen Resten

$$k, k-1^2, k-2^2, \dots, k-[(p-1)/2]^2$$

muss ein qu. Rest sein.

(4) lässt sich direkt nachrechnen.

Beweis von Satz 2 für $p^2 \nmid k$:

Wegen Hilfssatz 2 darf man $a \geq 2$ annehmen.

Ist k qu. Rest mod p , so folgt $s(k, p^a) = 1$ aus C.

Ist k qu. Nichtrest mod p , so ist $s(k, p^a) \geq 2$ wegen (1).

Sei $x_1^2 + x_2^2 \equiv k \pmod{p}$. Dann ist $k - x_2^2$ qu. Rest mod p , also ist auch $x_1^2 \equiv k - x_2^2 \pmod{p^a}$ lösbar (wegen C).

Ist $p \mid k$ aber $p^2 \nmid k$, so folgt aus

$$x_1^2 + x_2^2 \equiv k \pmod{p^a}, \quad (5)$$

dass die Reste x_1 und x_2 nicht durch p teilbar sind.

Im Falle $p \equiv 1 \pmod{4}$ ist (wegen $k \equiv 0 \pmod{p}$)

$$x_2^2 \equiv k - 1^2 \pmod{p}$$

lösbar. Also ist $k - 1$ auch qu. Rest mod p^a , und man erhält $s(k, p^a) = 2$.

Im Falle $p \equiv 3 \pmod{4}$ ist

$$x_1^2 + x_2^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

nicht lösbar mit $x_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ (wegen B) aber dafür wegen (3)

$$x_2^2 + x_3^2 \equiv k - 1^2 \pmod{p}.$$

Also ist $k - 1^2 - x_2^2$ ein qu. Rest mod p und damit auch mod p^a .

Beweis von Satz 3 für $4 \nmid k$: Sei $a \geq 3$.

Aus D folgt $s(k, 2^a) = 1$ für $k \equiv 1 \pmod{8}$ und aus Hilfssatz 2 und (1) die Ungleichungen

$$s(k, 2^a) \geq 2, \geq 3, \geq 4 \quad \text{für } k \equiv 2 \text{ oder } 5, 3 \text{ oder } 6, 7 \pmod{8}.$$

Für $k \equiv 2$ oder 5 ist $k - 1^2$ bzw. $k - 2^2 \equiv 1 \pmod{8}$ also ein Quadrat. Daraus folgt $s(k, 2^a) = 2$.

Für $k \equiv 3$ oder 6 ist $k - 1^2 - 1^2$ bzw. $k - 1^2 - 2^2 \equiv 1 \pmod{8}$. Daraus folgt $s(k, 2^a) = 3$.
Schliesslich ist für $k \equiv 7 \pmod{8}$ der Rest $k - 1^2 - 1^2 - 2^2 \equiv 1 \pmod{8}$. Also ist $s(k, 2^a) = 4$.

Beweis der Sätze 2 und 3 für $p^2 \mid k$

Die Behauptung folgt direkt aus (2) und

Hilfssatz 3. Für $a > 2$ ist $s(p^2 k, p^a) \geq s(k, p^{a-2})$.

Beweis: Aus (2) und dem bewiesenen Teil der Sätze 2 und 3 folgt

$$s(k, p^a) \leq \begin{cases} 2 & \text{für } p \equiv 1 \pmod{4} \\ 3 & \text{für } p \equiv 3 \pmod{4} \\ 4 & \text{für } p \equiv 2 \end{cases}$$

Sei $s(k, p^{a-2}) = s$, $s(p^2 k, p^a) = t$ und

$$x_1^2 + \dots + x_t^2 \equiv p^2 k \pmod{p^a}. \quad (6)$$

Dann ist

$$x_1^2 + \dots + x_t^2 \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Ist $p \equiv 1 \pmod{4}$ und $t=2$, so ist wegen $s \leq 2$ sicher $s \leq t$.

Ist aber $t=1$, so folgt $p \mid x_1$ und aus (6) $(x_1/p)^2 \equiv k \pmod{p^{a-2}}$.

Ist $p \equiv 3 \pmod{4}$, so ist nur im Falle $t \leq 2$ etwas zu beweisen.

Wegen B hat aber $x_1^2 + x_2^2 \equiv 0 \pmod{p}$ nur Lösungen x_1, x_2 mit $x_1, x_2 \equiv 0 \pmod{p}$.

Also folgt aus (6)

$$(x_1/p)^2 + (x_2/p)^2 \equiv k \pmod{p^{a-2}}.$$

Ist $p=2$, so ist nur im Falle $t \leq 3$ etwas zu beweisen.

Die Kongruenz $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \equiv 0 \pmod{4}$ hat nur Lösungen x_1, x_2, x_3 mit $x_1, x_2, x_3 \equiv 0 \pmod{2}$.

Also folgt aus (6)

$$(x_1/2)^2 + \dots + (x_t/2)^2 \equiv k \pmod{2^{a-2}}$$

und daraus $s(k, 2^{a-2}) \leq t$.

H. Wegmann, TH Darmstadt

LITERATURVERZEICHNIS

1 D. Laugwitz: Quadratsummen in Restklassenringen. El. Math. 35, 73–79 (1980).

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/83/020036-04\$1.50 + 0.20/0

Sätze vom Holditch-Typ für ebene Kurven

Herrn Prof. Dr. H. R. Müller zum 70. Geburtstag gewidmet

Werden in der euklidischen Ebene die Endpunkte X und X^* einer Strecke s von konstanter Länge C entlang einer Eilinie k bewegt, so erzeugt ein fester Punkt $\bar{X} \in s$ eine i. a. nichtkonvexe Kurve \bar{k} . Der Flächeninhalt des Bereiches zwischen k und \bar{k} hängt nach einem Satz von Holditch nicht von der Gestalt der Kurve k ab, sondern nur von der Lage des Punktes \bar{X} auf s [8]. Ausführlichere Untersuchungen damit zusammenhängender Fragen und Präzisierungen der klassischen Formulierung sind bei A. Broman [3, 4] zu finden. Ein etwas allgemeineres Ergebnis erhalten wir, wenn sich die Endpunkte der Strecke s entlang zweier verschiedener Kurven k und k^* bewegen [2]. H. R. Müller hat diese Resultate u. a. auf ein in gewissem Sinne «duales» Gegenstück zur klassischen Holditch-Bewegung übertragen [9]. Er unter-