

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 38 (1983)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Die Potenzreihe [Formel]  
**Autor:** Mortini, Raymond  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37184>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 W. Bender: The Holditch Curve Tracer. Math. Mag. 54, Nr. 3, 128–129 (1981).
- 2 W. Blaschke und H.R. Müller: Ebene Kinematik. Oldenbourg, München 1956.
- 3 A. Broman: Holditch's theorem is somewhat deeper than Holditch thought in 1858. Normat, S. 89–100 (1979).
- 4 A. Broman: Holditch's Theorem. Math. Mag. 54, Nr. 3, 99–108 (1981).
- 5 S. Hentschke: Erweiterungen des Satzes von Holditch. Sber. Akad. Wiss. Wien, Kl. II, S. 451–458 (1975).
- 6 L. Hering: Holditch-Sätze für Regelflächen und deren Übertragungen auf ebene und sphärische Kurven. Dissertation, Darmstadt 1981.
- 7 L. Hering: Holditch-Sätze für Regelflächen bzw. sphärische Kurven. Preprint Nr. 598, FB Math. der TH Darmstadt 1981, eingereicht bei: Arch. Math.
- 8 H. Holditch: Geometrical Theorem. Q. J. Pure Appl. Math. 2 (1858).
- 9 H.R. Müller: Zum Satz von Holditch. Aus: Tölke, Wills: Contribution to Geometry. Birkhäuser, Basel 1979.

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/83/020039-11\$1.50 + 0.20/0

## Die Potenzreihe $\sum n^m z^n, m \in \mathbf{N}$

Ein kurzer Weg zur Berechnung dieser Potenzreihe soll im folgenden dargelegt werden.

Gegeben sei der  $p$ -te Differenzenoperator  $D^p$ , welchen man folgendermassen definieren kann:

$$\begin{aligned} D^1 a_n &= a_n - a_{n-1}, \\ D^{p+1} a_n &= D^1(D^p a_n) \quad (p \geq 1), \end{aligned}$$

wobei die  $a_n, n \in \mathbf{Z}$ , irgendwelche komplexe Zahlen sind.

Mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion (nach  $p$ ) zeigt man, dass sich  $D^p$  schreiben lässt als

$$D^p a_n = \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} a_{n-j}. \tag{A}$$

Ebenfalls mit Hilfe der vollständigen Induktion nach  $p$  zeigt man folgendes:

$$\text{Aus } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{|a_n|} = 1 \quad \text{und} \quad a_{-n} = 0 \quad \text{für} \quad n \in \mathbf{N} \quad \text{folgt} \tag{B}$$

$$(1-z)^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (D^p a_n) z^n.$$

Diese beiden Resultate ermöglichen uns nun, den Wert der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m z^n$$

zu berechnen.

Behauptung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m z^n = \frac{H_m(z)}{(1-z)^{m+1}} \quad (|z| < 1),$$

wobei

$$H_m(z) = \sum_{n=1}^m \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} z^n$$

mit

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} := \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{m+1}{j} (n-j)^m \quad (n \leq m).$$

Beweis:

$$(1-z)^{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} n^m z^n = \sum_{n=m+1}^{\infty} D^{m+1}(n^m) z^n + \sum_{n=1}^m D^{m+1}(a_n) z^n$$

mit

$$a_n = \begin{cases} n^m & \text{falls } n \in \mathbf{N}, \\ 0 & \text{falls } -n \in \mathbf{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Weil  $n^m$  ein Polynom  $m$ -ten Grades ist, verschwindet  $D^{m+1}(n^m)$  für jedes  $m$ , falls nur  $n > m$ .

Damit erhalten wir folgendes Ergebnis:

$$(1-z)^{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} n^m z^n = \sum_{n=1}^m D^{m+1}(a_n) z^n = \sum_{n=1}^m \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{m+1}{j} (n-j)^m \right\} z^n.$$

Man beachte dabei, dass der Summationsindex  $j$  nur bis  $n-1$  läuft, denn  $a_{-n} = 0$  für  $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ .  $\square$

Die Koeffizienten  $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$  haben nun folgende Eigenschaften:

$$\begin{bmatrix} m+1 \\ n+1 \end{bmatrix} = (m+1-n) \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} + (n+1) \begin{bmatrix} m \\ n+1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ m-n+1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^m \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = m!, \quad (3)$$

während die Polynome  $H_m(z)$  folgender Rekursion genügen:

$$H_{m+1}(z) = (1-z)zH'_m(z) + (m+1)zH_m(z) \quad (m \in \mathbf{N}). \quad (4)$$

Beweis: (1) und (2) bestätigt man durch direktes Ausrechnen. (3) folgert man aus

(4), indem man  $z = 1$  setzt. Nun zu (4). Setze  $\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} := 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} & (1-z)z \sum_{n=1}^m \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} n z^{n-1} + (m+1)z \sum_{n=1}^m \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} z^n \\ &= \sum_{n=1}^m \left\{ \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix} \right\} n z^n + \sum_{n=1}^m (m+1) \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} z^{n+1} \\ & \setminus + \sum_{n=1}^m \begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix} z^n - m z^{m+1} \\ &= \sum_{n=1}^m \left\{ \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix} \right\} n z^n + \sum_{n=2}^m (m+1) \begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix} z^n + \sum_{n=1}^m \begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix} z^n + z^{m+1} \\ &= \sum_{n=1}^m \left\{ n \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} + (m+2-n) \begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix} \right\} z^n + z^{m+1} = \sum_{n=1}^{m+1} \begin{bmatrix} m+1 \\ n \end{bmatrix} z^n. \quad \square \end{aligned}$$

Raymond Mortini, Mathematisches Institut, Universität Karlsruhe

## Aufgaben

**Aufgabe 876.** Es sei  $n$  weder eine Primzahl noch eine Primzahlpotenz. Mit  $p(n)$ ,  $P_1(n)$ ,  $P(n)$  sei der kleinste bzw. zweitgrösste bzw. grösste Primfaktor von  $n$  bezeichnet,  $p(n) \leq P_1(n) < P(n)$ . Man zeige:

$$\sum'_n p(n)/n P(n) < \infty. \quad (1)$$

$$\sum'_n P_1(n)/n P(n) = \infty. \quad (2)$$

P. Erdős