Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 38 (1983)
Heft: 2

Artikel: Die Potenzreihe [Formel]
Autor: Mortini, Raymond
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37184

LITERATURVERZEICHNIS

1 W. Bender: The Holditch Curve Tracer. Math. Mag. *54*, Nr. 3, 128–129 (1981).
2 W. Blaschke und H. R. Müller: Ebene Kinematik. Oldenbourg, München 1956.
3 A. Broman: Holditch's theorem is somewhat deeper than Holditch thought in 1858. Normat, S. 89–100 (1979).
4 A. Broman: Holditch's Theorem. Math. Mag. *54*, Nr. 3, 99–108 (1981).
5 S. Hentschke: Erweiterungen des Satzes von Holditch. Sber. Akad. Wiss. Wien, Kl. II, S. 451–458 (1975).
6 L. Hering: Holditch-Sätze für Regelflächen und deren Übertragungen auf ebene und sphärische Kurven. Dissertation, Darmstadt 1981.
7 L. Hering: Holditch-Sätze für Regelflächen bzw. sphärische Kurven. Preprint Nr. 598, FB Math. der TH Darmstadt 1981, eingereicht bei: Arch. Math.
8 H. Holditch: Geometrical Theorem. Q. J. Pure Appl. Math. *2* (1858).
9 H. R. Müller: Zum Satz von Holditch. Aus: Tölke, Wills: Contribution to Geometry. Birkhäuser, Basel 1979.

 0013-6018/83/020039-11$1.50+0.20/0

Die Potenzreihe $\sum n^m z^n$, $m \in \mathbf{N}$

Ein kurzer Weg zur Berechnung dieser Potenzreihe soll im folgenden dargelegt werden.
Gegeben sei der p-te Differenzenoperator D^p, welchen man folgendermassen definieren kann:

$$D^1 a_n = a_n - a_{n-1},$$
$$D^{p+1} a_n = D^1 (D^p a_n) \qquad (p \geqslant 1),$$

wobei die a_n, $n \in \mathbf{Z}$, irgendwelche komplexe Zahlen sind.
Mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion (nach p) zeigt man, dass sich D^p schreiben lässt als

$$D^p a_n = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p}{j} a_{n-j}. \tag{A}$$

Ebenfalls mit Hilfe der vollständigen Induktion nach p zeigt man folgendes:

Aus $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ und $a_{-n} = 0$ für $n \in \mathbf{N}$ folgt (B)

$$(1-z)^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (D^p a_n) z^n.$$

Diese beiden Resultate ermöglichen uns nun, den Wert der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m z^n$$

zu berechnen.

Behauptung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m z^n = \frac{H_m(z)}{(1-z)^{m+1}} \qquad (|z|<1),$$

wobei

$$H_m(z) = \sum_{n=1}^{m} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} z^n$$

mit

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} := \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{m+1}{j} (n-j)^m \qquad (n \leqslant m).$$

Beweis:

$$(1-z)^{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} n^m z^n = \sum_{n=m+1}^{\infty} D^{m+1}(n^m) z^n + \sum_{n=1}^{m} D^{m+1}(a_n) z^n$$

mit

$$a_n = \begin{cases} n^m & \text{falls } n \in \mathbf{N}, \\ 0 & \text{falls } -n \in \mathbf{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Weil n^m ein Polynom m-ten Grades ist, verschwindet $D^{m+1}(n^m)$ für jedes m, falls nur $n > m$.
Damit erhalten wir folgendes Ergebnis:

$$(1-z)^{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} n^m z^n = \sum_{n=1}^{m} D^{m+1}(a_n) z^n = \sum_{n=1}^{m} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{m+1}{j} (n-j)^m \right\} z^n.$$

Man beachte dabei, dass der Summationsindex j nur bis $n-1$ läuft, denn $a_{-n}=0$ für $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. □

Die Koeffizienten $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ haben nun folgende Eigenschaften:

$$\begin{bmatrix} m+1 \\ n+1 \end{bmatrix} = (m+1-n) \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} + (n+1) \begin{bmatrix} m \\ n+1 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ m-n+1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{m} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = m!, \tag{3}$$

während die Polynome $H_m(z)$ folgender Rekursion genügen:

$$H_{m+1}(z)=(1-z)\,z\,H'_m(z)+(m+1)\,z\,H_m(z) \qquad (m\in\mathbf{N}). \tag{4}$$

Beweise: (1) und (2) bestätigt man durch direktes Ausrechnen. (3) folgert man aus (4), indem man $z=1$ setzt. Nun zu (4). Setze $\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}:=0$. Dann gilt:

$$(1-z)\,z\sum_{n=1}^{m}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} n\,z^{n-1}+(m+1)\,z\sum_{n=1}^{m}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} z^{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\left\{\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix}\right\} n\,z^{n}+\sum_{n=1}^{m}(m+1)\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} z^{n+1}$$

$$+\sum_{n=1}^{m}\begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix} z^{n}-m\,z^{m+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\left\{\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix}\right\} n\,z^{n}+\sum_{n=2}^{m}(m+1)\begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix} z^{n}+\sum_{n=1}^{m}\begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix} z^{n}+z^{m+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\left\{n\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}+(m+2-n)\begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix}\right\} z^{n}+z^{m+1}=\sum_{n=1}^{m+1}\begin{bmatrix} m+1 \\ n \end{bmatrix} z^{n}. \qquad \square$$

Raymond Mortini, Mathematisches Institut, Universität Karlsruhe

 0013-6018/83/020049-03$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 876. Es sei n weder eine Primzahl noch eine Primzahlpotenz. Mit $p(n)$, $P_1(n)$, $P(n)$ sei der kleinste bzw. zweitgrösste bzw. grösste Primfaktor von n bezeichnet, $p(n)\leqslant P_1(n)<P(n)$. Man zeige:

$$\sum_n{}' p(n)/n\,P(n)<\infty. \tag{1}$$

$$\sum_n{}' P_1(n)/n\,P(n)=\infty. \tag{2}$$

P. Erdös