Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 38 (1983)

Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

während die Polynome $H_m(z)$ folgender Rekursion genügen:

$$H_{m+1}(z)=(1-z)\,z\,H'_m(z)+(m+1)\,z\,H_m(z) \qquad (m\in\mathbf{N})\,. \tag{4}$$

Beweise: (1) und (2) bestätigt man durch direktes Ausrechnen. (3) folgert man aus (4), indem man $z=1$ setzt. Nun zu (4). Setze $\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}:=0$. Dann gilt:

$$(1-z)\,z\sum_{n=1}^{m}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} n\,z^{n-1}+(m+1)\,z\sum_{n=1}^{m}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} z^{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\left\{\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix}\right\} n\,z^{n}+\sum_{n=1}^{m}(m+1)\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} z^{n+1}$$

$$+\sum_{n=1}^{m}\begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix} z^{n}-m\,z^{m+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\left\{\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix}\right\} n\,z^{n}+\sum_{n=2}^{m}(m+1)\begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix} z^{n}+\sum_{n=1}^{m}\begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix} z^{n}+z^{m+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\left\{n\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}+(m+2-n)\begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix}\right\} z^{n}+z^{m+1}=\sum_{n=1}^{m+1}\begin{bmatrix} m+1 \\ n \end{bmatrix} z^{n}. \qquad \square$$

Raymond Mortini, Mathematisches Institut, Universität Karlsruhe

 0013-6018/83/020049-03$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 876. Es sei n weder eine Primzahl noch eine Primzahlpotenz. Mit $p(n)$, $P_1(n)$, $P(n)$ sei der kleinste bzw. zweitgrösste bzw. grösste Primfaktor von n bezeichnet, $p(n)\leqslant P_1(n)<P(n)$. Man zeige:

$$\sum_n{}' p(n)/n\,P(n)<\infty\,. \tag{1}$$

$$\sum_n{}' P_1(n)/n\,P(n)=\infty\,. \tag{2}$$

P. Erdös

Lösung: Im folgenden bezeichnen p und q Primzahlen. Bekanntlich gilt

$$\sum_{n<y} \frac{1}{n} \sim \log y \qquad (y \to \infty), \tag{3}$$

$$\sum_{p<y} \log p \sim y \qquad (y \to \infty), \tag{4}$$

$$\prod_{p \leqslant y} (1-p^{-1}) \sim e^{\gamma} \log y \, (y \to \infty), \tag{5}$$

also

$$\prod_{y^{1/2} \leqslant p \leqslant y} (1-p^{-1})^{-1} = 0(1) \, (y \to \infty). \tag{6}$$

Um (1) zu beweisen, betrachten wir $n = pqm \leqslant x$, mit $p = P(n)$, $q = p(n)$. Also sind alle Primfaktoren von m im Interval $[q,p]$; (auch $m=1$ ist zugelassen). Es sei $S(q,p)$ die Summe $\sum m^{-1}$ über alle Zahlen m, die nur Primfaktoren im Interval $[q,p]$ haben. Dann gilt nach (5) und (6)

$$S(q,p) = 0(\log p), \tag{7}$$

und

$$S(q,p) = 0(1) \quad \text{für} \quad q \geqslant p^{1/2}. \tag{8}$$

Es ist also

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leqslant x}{}' p(n)/nP(n) &\leqslant \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p^2} \sum_{q<p} S(q,p) \\
&\leqslant c \cdot \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p^2} \{\pi(p^{1/2}) \log p + \pi(p)\} \\
&\leqslant c' \cdot \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p \log p} = 0(1), \qquad (x \to \infty),
\end{aligned}$$

weil bekanntlich die Reihe $\sum p (p \log p)^{-1}$ konvergiert. Damit ist (1) bewiesen. Für die Behauptung (2) betrachten wir wieder $p \leqslant x$, $q < p$ und jetzt alle Zahlen $m < q$. Wir nehmen $n = mqp$. Für diese Zahlen n ist der Beitrag zu $\sum' P_1(n)/nP(n)$ gleich

$$\begin{aligned}
\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p^2} \sum_{q<p} \sum_{m<q} \frac{1}{m} &\geqslant c \cdot \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p^2} \sum_{q<p} \log q \\
&\geqslant c' \cdot \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} \to \infty \qquad (\text{für } x \to \infty),
\end{aligned}$$

unter Benützung von (3) und (4). Damit ist (2) bewiesen.

J. H. van Lint, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), J. Fehér (Pécs, Ungarn), W. Janous (Innsbruck, A).

Aufgabe 877. Die Funktion f: $[0,1] \to \mathbf{R}$ sei stetig differenzierbar, und es gelte $f(0)=f(1)=0$. Man zeige:

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \frac{1}{12}\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx.$$

Wann genau gilt Gleichheit? H.-J. Seiffert, Berlin, BRD

Lösung: Partielle Integration liefert wegen $f(0)=f(1)=0$ unmittelbar

$$2\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (1-2x)f'(x)\,dx,$$

was nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für Integrale zu

$$4\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 (1-2x)^2\,dx \cdot \int_0^1 f'(x)^2\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 f'(x)^2\,dx$$

führt und somit die behauptete Ungleichung beweist. In ihr gilt Gleichheit genau dann, wenn $f'(x)=c(1-2x)$ für $0\leqslant x\leqslant 1$ bei festem $c\in\mathbf{R}$ gilt. Dies wiederum ist unter den über f gemachten Voraussetzungen äquivalent mit $f(x)=cx(1-x)$ für $0\leqslant x\leqslant 1$.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten U. Abel (Giessen, BRD), T. Ivaniec (Warschau, Polen), A.A. Jagers (Enschede, NL), Kee-Wai Lau (Hongkong), M.S. Klamkin und A. Meir (Edmonton, Kanada), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr. A. Meyer (Ittigen), A. Müller (Zürich), H. Wellstein (Flensburg, BRD).

Aufgabe 878. Die Kurve C mit der Gleichung

$$x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 = 0,$$

bezogen auf ein gleichseitiges Koordinatendreieck Δ mit dem Schwerpunkt $E=(1,1,1)$ als Einheitspunkt, berührt die Seiten von Δ je in einer Ecke. C besitzt ein weiteres gleichseitiges, dem Dreieck Δ umbeschriebenes Tangentendreieck Δ'. Man zeige, dass das Seitenverhältnis von Δ' und Δ den Wert $\sqrt[3]{2}-1$ hat.

C. Bindschedler, Küsnacht

Solution: Let a tangent T_1 of C, containing the vertex $P_1(1,0,0)$ but not coincident with one of the edges of Δ, have the equation

$$x_3 - \mu x_2 = 0 \qquad (\mu \neq 0).$$

The common points (x_1, x_2, x_3) of T_1 and C are the solutions of the system of equations

$$x_1^2 x_2 + \mu x_2^3 + \mu^2 x_1 x_2^2 = 0$$
$$x_3 = \mu x_2 .$$

This system has the fixed solution $(1,0,0)$ and two other solutions corresponding to the quadratic system of equations

$$\begin{aligned} &x_1^2 + \mu^2 x_1 x_2 + \mu x_2^2 = 0 \\ &x_3 = \mu x_2 . \end{aligned} \tag{$*$}$$

The tangency condition forces $(*)$ to have a double root, i.e. a vanishing discriminant: $\mu^4 - 4\mu = 0$, so that T_1 reads

$$T_1 : x_3 - \sqrt[3]{4}\, x_2 = 0 \qquad \text{(containing } P_1\text{)}.$$

In the same way we find the other tangents

$$T_2 : x_1 - \sqrt[3]{4}\, x_3 = 0 \qquad \text{(containing } P_2\text{)},$$
$$T_3 : x_2 - \sqrt[3]{4}\, x_1 = 0 \qquad \text{(containing } P_3\text{)}.$$

T_1 and T_2 have the common point $P_{12}(\sqrt[3]{16}, 1, \sqrt[3]{4})$ whose distances to the sides of Δ are proportional to $\sqrt[3]{16} : 1 : \sqrt[3]{4}$.
Since the sum of these distances equals the altitude of the equilateral triangle Δ we find for the surface area $|\Delta_{12}|$ of triangle $P_1 P_2 P_{12}$

$$|\Delta_{12}| = \frac{\sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16}} |\Delta| .$$

Hence, by symmetry the surface area $|\Delta'|$ of the central triangle Δ' satisfies

$$|\Delta'| = |\Delta| - 3|\Delta_{12}| = \frac{1 - 2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16}}{1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16}} |\Delta|$$
$$= \left(\frac{\sqrt[3]{4} - 1}{\sqrt[3]{2} + 1}\right)^2 |\Delta| = (\sqrt[3]{2} - 1)^2 |\Delta|$$

from which the desired edge ratio follows.

O. P. Lossers (Eindhoven, NL)

Weitere Lösungen sandten J. T. Groenman (Arnhem, NL), L. Kuipers (Sierre).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Oktober 1983* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68), Problem 872A (Band 36, S. 175).

Aufgabe 894. Die hypergeometrische Reihe $F(1, 1; 1/2; z)$ stellt eine elementare transzendente Funktion dar. Man gebe diese an.

E. Lanckau, Karl-Marx-Stadt, DDR

Aufgabe 895. Für reelle α, β, x mit $\alpha > \beta > 0, x > 0, x \neq 1$ beweise man folgende Ungleichung:

$$\frac{x^{\alpha+\beta}-1}{x^{\alpha}-1} > \frac{\alpha+\beta}{2\alpha}(1+x^{\beta}).$$

P. Ivády, Budapest, Ungarn

Literaturüberschau

L. Euler: Briefwechsel, Band 5. Opera Omnia, Series Quarta A, Hrsg. A. P. Juškevič und R. Taton, VIII und 611 Seiten, Fr. 150.–. Birkhäuser, Basel 1980.

In der monumentalen Eulerausgabe erschien im Jahre 1975 innerhalb der vorgesehenen Briefwechselreihe zunächst der äusserst nützliche Übersichtsband IV A 1 mit kurzen Inhaltsangaben zu über 3000 Briefen. Nun liegt mit Band IV A 5 Eulers Korrespondenz mit den französischen Gelehrten Clairaut, d'Alembert und Lagrange in vollem Wortlaut vor. Die hier publizierten 136 Briefe (weitere, erst nachträglich entdeckte Briefe sollen im letzten Band der Reihe veröffentlicht werden) geben wertvollen Aufschluss über wichtige Diskussionen zu der Himmelsmechanik, der Anfangsbedingung einer schwingenden Saite, der Variationsrechnung, den Logarithmen negativer Zahlen usw. Sämtliche Briefe sind mit detaillierten Anmerkungen versehen und den lateinisch abgefassten ist eine französische Übersetzung beigegeben. Neben dem eigentlichen Briefwechsel enthält der vorzüglich ausgestattete Band ferner eine kurze Einführung zu den drei Briefwechseln sowie mehrere Register.

E. Neuenschwander

P. D. Straffin: Topics in the Theory of Voting. IX und 69 Seiten, Fr. 12.–. Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart 1980.

Das vorliegende Buch will einen möglichst grossen Leserkreis in ein Spezialgebiet finiter Mathematik, die Abstimmungstheorie, einführen.

Im Mittelpunkt steht dabei eine Masszahl für die Macht, die ein einzelner in einem Abstimmungsgremium bei der Wahl besitzt (measure of voting power).

Das 1. Kapitel bringt eine solche, auf Shapley und Shubik zurückgehende Masszahl, erweitert diese dann auf Abstimmungskoalitionen und vergleicht schliesslich Machtverhältnisse bei zwei und mehr Abstimmungsgremien.

Im 2. Kapitel wird der Fall behandelt, dass der Wähler nicht nur mit «Ja» oder mit «Nein» stimmt. Er kann zwischen drei oder gar mehr Möglichkeiten wählen. Es werden verschiedene Methoden zur Lösung