

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 38 (1983)  
**Heft:** 3

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**Lemma 1.** *The points in  $E^4$  with two odd and two even coordinates form a  $\{3, 4, 3, 3\}$  lattice ([2], p. 158).*

**Lemma 2.** *The points in  $E^4$  whose coordinates are integers of the same parity form a  $\{3, 3, 4, 3\}$  lattice.*

Proof of lemma 2: Since the unit cells of the  $\{3, 4, 3, 3\}$  lattice have the same orientation in space ([2], p. 156), we can reach any of them by a translation of the cell centered at the origin – the one with vertices  $(\pm 1, \pm 1, 0, 0)$  and permutations. The images of these 24 points under translation through  $(a, b, c, d)$  will have the required two odd and two even coordinates if and only if  $a, b, c, d$  are integers of the same parity. The points  $(a, b, c, d)$ , being the centers of the translated cells, will form a reciprocal  $\{3, 3, 4, 3\}$  lattice.

It follows from lemmas 1 and 2 that if a polytope can be embedded in  $\{3, 4, 3, 3\}$  or in  $\{3, 3, 4, 3\}$ , then it can also be embedded in the cubic lattice  $\{4, 3, 3, 4\}$ . Conversely, by doubling the Cartesian coordinates of a polytope embedded in  $\{4, 3, 3, 4\}$  and translating the resulting figure either through  $(1, 1, 0, 0)$  or through  $(0, 0, 0, 0)$ , we will obtain a similar polytope which satisfies the respective parity requirements of  $\{3, 4, 3, 3\}$  or  $\{3, 3, 4, 3\}$ . Therefore:

**Theorem.** *The same polytopes can be embedded in each of the regular four-dimensional lattices.*

With this result, the lattice polytope problem is completely solved.

Gregg N. Patrino, 373 Giffords Lane, Staten Island, NY, USA

## REFERENCES

- 1 O. Buggisch: Aufgabe 709. El. Math. 30, 15 (1975).
- 2 H.S.M. Coxeter: Regular Polytopes, 2nd ed. Macmillan, New York 1963.
- 3 J. Hammer: Unsolved Problems Concerning Lattice Points. Research Notes in Mathematics, No. 15. Pitman, London, San Francisco, Melbourne 1978.
- 4 W. Scherrer: Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter. El. Math. 1, 97–98 (1946).
- 5 L. Schläfli: Theorie der vielfachen Kontinuität. Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft 38, 1–237 (1901).
- 6 I.J. Schoenberg: Regular simplices and quadratic forms. J. Lond. Math. Soc. 12, 48–55 (1937).

## Aufgaben

**Aufgabe 879.** Welche Beziehung besteht zwischen dem Abstand und dem Winkel irgend zweier windschiefer Erzeugenden eines einschaligen Drehhyperboloids?

W. Wunderlich, Wien, A

Lösung: Sei

$$\Gamma = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2/r^2 + x_2^2/r^2 - x_3^2/s^2 = 1\}$$

das Drehhyperboloid. Sei weiter  $a$  Richtungsvektor der einen Erzeugenden auf  $\Gamma$ , also o.E.d.A.

$$a = (0, a_2, a_3) := (0, \cos \varepsilon, \sin \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < \pi/2.$$

Dabei bezeichnet  $\varepsilon$  den Neigungswinkel von  $a$  zur  $x_1x_2$ -Ebene. Durch eine Drehung  $R$  um die  $x_3$ -Achse mit dem Drehwinkel  $\beta$  geht  $a$  in die Richtung  $Ra = b$  der zweiten Erzeugenden über. Für den Winkel  $\delta$  zwischen beiden Erzeugenden gilt also

$$\cos \delta = a \cdot b = (0, a_2, a_3) \cdot (-a_2 \sin \beta, a_2 \cos \beta, a_3).$$

Hieraus folgt

$$\cos \beta = (\cos \delta - a_3^2/a_2^2). \quad (*)$$

Für den Abstand  $d$  der Erzeugenden findet man

$$\begin{aligned} d \sin \delta &= |(a \times b) \cdot (r e_1 - r R e_1)| \\ &= r a_2 a_3 |(1 - \cos \beta, -\sin \beta, \sin \beta) \cdot (1 - \cos \beta, -\sin \beta, 0)|. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit (\*)

$$\begin{aligned} d &= 2 r a_2 a_3 (1 - \cos \beta) / \sin \delta = 2 r a_3 / a_2 \cdot \sqrt{(1 - \cos \delta) / (1 + \cos \delta)} \\ &= (2 r a_3 / a_2) \tan \delta / 2. \end{aligned}$$

und daraus wegen  $a_3/a_2 = \tan \varepsilon = s/r$ :

$$d = 2 r \tan \varepsilon \tan \delta / 2 = 2 s \tan \delta / 2.$$

A. Müller, Zürich

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht), R. Cruse (Karlsruhe, BRD), L. Kuipers (Sierre), O.P. Lössers (Eindhoven, NL; 2 Lösungen), V.D. Mascioni (Origlio), Th. Müller (Thallern, A), E. Ungethüm (Wien, A; 4 Lösungen).

**Aufgabe 881.** Zu drei gegebenen Kreisen, die in drei verschiedenen nicht demselben Büschel angehörenden Ebenen und nicht auf derselben Kugel liegen, gibt es im allgemeinen (Ausnahmen!) genau eine Ebene, welche diese Kreise in sechs Punkten eines Kreises schneidet (imaginäre Schnittpunkte mitgerechnet). Dies ist zu zeigen.

C. Bindschedler, Küsnacht

**Lösung:** Legt man durch die beiden ersten der drei gegebenen Kreise  $k_1, k_2, k_3$  je eine beliebige Kugel, so schneidet sich ihre Potenzebene mit den beiden Kreisebenen im allgemeinen in einem Punkt  $A$ , welcher die gleiche Potenz in bezug auf die beiden gewählten Kreise  $k_1, k_2$  hat. Folglich schneidet jede durch  $A$  verlaufende

Ebene  $k_1$  und  $k_2$  je in zwei (möglicherweise imaginären) Punkten, die demselben Kreis angehören. In analoger Weise bestimmen die Kreise  $k_1, k_3$  einen Punkt  $B$  sowie  $k_2, k_3$  einen Punkt  $C$ . Die im allgemeinen eindeutig bestimmte Ebene durch  $A, B$  und  $C$  schneidet daher  $k_1, k_2$  und  $k_3$  in sechs Punkten eines Kreises (denn nimmt man im Gegensatz dazu an, dass die sechs Schnittpunkte je zu viert auf drei verschiedenen Kreisen liegen, so müssten  $A, B$  und  $C$  gleichwohl je dieselbe Potenz bezüglich dieser drei Kreise aufweisen, was aber nur dann der Fall wäre, wenn  $A, B, C$  auf einer Geraden liegen würden. Dies ist aber ausgeschlossen, weil die gegebenen Kreisebenen nicht demselben Büschel angehören dürfen.)

Ausnahmefälle liegen etwa vor, wenn genau zwei der drei gegebenen Kreisebenen parallel zueinander sind, zwei Kreise auf einer Kugel liegen oder die drei Kreise konzentrisch sind. Dann kann es keine oder beliebig viele Ebenen mit der verlangten Schnitteigenschaft geben.

Hj. Stocker, Wädenswil

Eine weitere Lösung sandte L. Kuipers (Sierre).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis *10. Dezember 1983* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem...A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S.67), Problem 625 B (Band 25, S.68), Problem 645 A (Band 26, S.46), Problem 672 A (Band 27, S.68), Aufgabe 680 (Band 27, S.116), Problem 724 A (Band 30, S.91), Problem 764 A (Band 31, S.44), Problem 862 A (Band 36, S.68). Problem 872 A (Band 36, S.175), Aufgabe 880 (Band 37, S.93).

**Aufgabe 896.** If  $a_1, a_2, a_3$  are the sides of a triangle  $A_1A_2A_3$  and  $R_1, R_2, R_3$  are the distances from an arbitrary point  $P$  in the plane of the triangle to the vertices  $A_1, A_2, A_3$ , prove that

$$\sum_{i=1}^3 a_i R_i (a_i^4 + R_i^4) \geq 10 \prod_{i=1}^3 a_i R_i.$$

M. S. Klamkin, Edmonton, CDN

**Aufgabe 897.** Für positive reelle  $x$  und natürliche  $n$  sei

$$S_n(x) := \sum_{\substack{1 \leq k \leq x \\ (k, n) = 1}} \mu(k) [x/k]$$

( $\mu$ : Möbiusfunktion,  $[ ]$ : Ganzzteilfunktion). Man zeige:  $S_n(x)$  ist gleich der Anzahl der Teiler  $t$  von  $n^{\lceil \log_2 x \rceil}$  mit  $t \leq x$ .

K. Szabo, Miskolc, Ungarn