Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 38 (1983)

Heft: 4

Rubrik: Aufgaben

Schreibt man dies in der Form

$$\Delta^p\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{H_p(x)}{(1-x)^{p+1}}, \qquad H_p(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_px^p,$$

so folgt mit (1) die Gleichung

$$(1-x)^{p+1}\sum_1^\infty n^p x^n = H_p(x).$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $c_0=0$ und für die übrigen c_n die von Mortini gegebene «geschlossene» Form

$$c_n=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{p+1}{j}(n-j)^p, \qquad n=1,2,\ldots,p.$$

Und aus

$$\frac{H_{p+1}(x)}{(1-x)^{p+2}}=\Delta\left(\Delta^p\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)=x\frac{d}{dx}\left(\frac{H_p(x)}{(1-x)^{p+1}}\right)$$
$$=\frac{x(x-1)H_p'(x)+x(p+1)H_p(x)}{(1-x)^{p+2}}$$

kann man sofort die Rekursionsformel für H_p ablesen.

Albert Pfluger, Zürich

 0013-6018/83/040101-02\$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 882. Für $n=2$ und $n=3$ ermittle man Lösungen $(x_1,\ldots,x_n;\ y_1,\ldots,y_n)\in\mathbf{C}^{2n}$ der Gleichung

$$\sum_{i=1}^n(x_i/y_i)=\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)\Big/\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)$$

in Gestalt zyklischer Parameterdarstellungen, d.h.:

$$x_{\sigma(i)}=f(u_{\sigma(1)},\ldots,u_{\sigma(n)}), \qquad y_{\sigma(i)}=g(u_{\sigma(1)},\ldots,u_{\sigma(n)}); \qquad i=1,\ldots,n$$

für beliebige zyklische Permutationen σ der Indizes $1,\ldots,n$.

I. Paasche, München, BRD

Lösung (nach den Lösungen des Aufgabenstellers sowie von Hj. Stocker, Wädenswil, von der Redaktion bearbeitet):
$n=2$: Die gegebene Gleichung lässt sich umformen zu

$$(x_1+x_2)(x_1y_2+x_2y_1)=y_1y_2(y_1+y_2).$$

Aus dem Ansatz

$$x_1+x_2=y_1+y_2, \qquad x_1y_2+x_2y_1=y_1y_2$$

gewinnt man die Lösung

$$f(u_1,u_2)=u_1^2/(u_1-u_2), \qquad g(u_1,u_2)=u_1.$$

Der Ansatz

$$x_1+x_2=y_1y_2, \qquad x_1y_2+x_2y_1=y_1+y_2$$

liefert die weitere Lösung

$$f(u_1,u_2)=(u_1^2-u_1-u_2)/(u_1-u_2), \qquad g(u_1,u_2)=u_1.$$

$n=3$: Lösungsansätze liefert die Dreiecksgeometrie. So ergibt z. B. die Höhen-Berührstreckenformel

$$\sum(h_a^{-1}/s_a^{-1})=(\sum s_a^{-1})\,/\,(\sum h_a^{-1})$$

die folgende Lösung:

$$f(u_1,u_2,u_3)=u_1[(u_1+u_2+u_3)(-u_1+u_2+u_3)(u_1-u_2+u_3)(u_1+u_2-u_3)]^{-1/2}$$
$$g(u_1,u_2,u_3)=(-u_1+u_2+u_3)^{-1}.$$

Für beliebiges $n\in\mathbf{N}$ erhält man triviale Lösungen in der Gestalt $f=s, g=\sqrt{n}\,s$, wobei s eine in den Variablen $u_1,\dots,u_n$ symmetrische Funktion ist.
Einen weiteren Beitrag sandte W. Janous (Innsbruck, A).

Aufgabe 883. Für komplexe z mit $|z|<1$ ist die Summe

$$\sum_{(m,n)=1} m\,n\,z^{m+n}(1+z^{m+n})(1-z^{m+n})^{-3},$$

erstreckt über alle Paare (m,n) teilerfremder natürlicher Zahlen geschlossen auszuwerten.

M. Bencze, Sàcele, Rumänien

Solution: Since

$$(t+t^2)(1-t)^{-3}=\sum_{d=1}^{\infty} d^2 t^d \quad \text{for} \quad |t|<1,$$

the given sum S can be rewritten as

$$\begin{aligned} S &= \sum_{(m,n)=1} m\,n \sum_{d=1}^{\infty} d^2 z^{md+nd} \\ &= \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{(p,q)=d} p\,q\,z^{p+q} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p\,q\,z^{p+q} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,z^n\right)^2 \\ &= z^2(1-z)^{-4}, \end{aligned}$$

by absolute convergence for $|z|<1$.

A. A. Jagers, Enschede, NL

Eine weitere Lösung sandte P. Bundschuh (Köln, BRD).

Aufgabe 884. Für beliebige $x_{ik}\in\mathbf{R}, i=1,\dots,x; k=1,\dots,m$ zeige man, dass

$$\left\{\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ik}\right)^2\right\}^{1/2} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} x_{ik}^2\right)^{1/2}.$$

Z. A. L. Geöcze, Viçosa, Brasilien

Lösung: Mit $\boldsymbol{x}_i := (x_{i1},\dots,x_{im})\in\mathbf{R}^m$ und der euklidischen Norm

$$\|\boldsymbol{x}_i\| = \left(\sum_{k=1}^{m} x_{ik}^2\right)^{1/2}$$

lautet die zu beweisende Ungleichung

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{x}_i\|,$$

d. i. die Dreiecksungleichung für n Vektoren.

W. Janous, Innsbruck, A

Weitere Lösungen sandten U. Abel (Giessen, BRD), K. Bickel (Freiburg, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), B.C. Carlson (Ames, Iowa, USA), L. Filep (Nyiregyhaza, Ungarn), A.A. Jagers (Enschede, NL), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hongkong), V.D. Mascioni (Origlio) (2 Lösungen), Chr.A. Meyer (Ittigen), A. Müller (Zürich), H.-J. Seiffert (Berlin), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil).

0013-6018/83/040102-02$1.50 + 0.20/0

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Februar 1984* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S.67), Problem 625B (Band 25, S.68). Problem 645A (Band 26, S.46), Problem 672A (Band 27, S.68), Aufgabe 680 (Band 27, S.116), Problem 724A (Band 30, S.91), Problem 764A (Band 31, S.44), Problem 862A (Band 36, S.68), Problem 872A (Band 36, S.175).

Aufgabe 898. Let $f \in C^n\,[0,1]$ with

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=0 \quad \text{for} \quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

Show that for $p \geqslant 1$

$$\int_0^1 |f^{(n)}(x)|^p\,dx \geqslant (2n+1)^{-a}\left((2n+1)!/n!\right)^p \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|^p$$

where $a := \min\{1, p/2\}$. When does equality hold?

M. S. Klamkin und A. Meir, Edmonton, CDN

Aufgabe 899. Es seien a_1, a_2, a_3 die Innenwinkel eines ebenen Dreiecks mit Inkreisradius r und Umkreisradius R. Man zeige, dass

$$\prod_{i=1}^{3} (3a_i/\pi) \geqslant 2r/R.$$

Wann genau steht das Gleichheitszeichen?

V. D. Mascioni, Origlio

Berichtigung zu Aufgabe 893.
(Band 38, S. 24): In der ersten und vierten Zeile ist m durch x zu ersetzen. Der Passus «für $x \not\equiv 0 \pmod{p}$» in der zweiten Zeile ist überflüssig.