

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 38 (1983)
Heft: 6

Artikel: Über die konvexe Hülle von Zufallspunkten in Eibereichen
Autor: Buchta, C.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-37199>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über die konvexe Hülle von Zufallspunkten in Eibereichen

Es bezeichne $V_n^{(d)}(K)$ den Erwartungswert des Volumens der konvexen Hülle von n Punkten, die zufällig nach der Gleichverteilung und unabhängig voneinander in einem (eigentlichen) d -dimensionalen konvexen Körper K gewählt werden. Explizite Werte von $V_n^{(d)}(K)$ für $d=2$ und beliebiges n sind nur in den Fällen bekannt, dass K ein Polygon [1] oder eine Ellipse [2] ist. Beispielsweise gilt:

K (Flächeninhalt 1)	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
Dreieck	$\frac{1}{12}$ = 0,08333	$\frac{1}{6}$ = 0,16667	$\frac{43}{180}$ = 0,23889	$\frac{3}{10}$ = 0,30000
Parallelogramm	$\frac{11}{144}$ = 0,07639	$\frac{11}{72}$ = 0,15278	$\frac{79}{360}$ = 0,21944	$\frac{199}{720}$ = 0,27639
Reguläres Sechseck	$\frac{289}{3888}$ = 0,07433	$\frac{289}{1944}$ = 0,14866	$\frac{149347}{699840}$ = 0,21340	$\frac{62647}{233280}$ = 0,26855
Kreis oder Ellipse	$\frac{35}{48\pi^2}$ = 0,07388	$\frac{35}{24\pi^2}$ = 0,14776	$\frac{175}{72\pi^2} - \frac{23023}{6912\pi^4}$ = 0,21207	$\frac{175}{48\pi^2} - \frac{23023}{2304\pi^4}$ = 0,26682

Für $d=3$ und beliebiges n kennt man $V_n^{(d)}(K)$ nur für die Ellipsoide [2]; die ersten nichttrivialen Werte sind:

K (Volumen 1)	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
Kugel oder Ellipsoid	$\frac{9}{715}$ = 0,01259	$\frac{9}{286}$ = 0,03147	$\frac{3105}{58786}$ = 0,05282	$\frac{531}{7106}$ = 0,07473

In höheren Dimensionen ist bisher anscheinend nur der Spezialfall $n=d+1$ für die Ellipsoide gelöst worden:

$$V_d^{(d-1)}(K) = \frac{1}{2^{d-1}} \binom{d}{d/2} \left(\frac{d^2}{d^2/2} \right)^{-1} V(K),$$

wobei $V(K)$ das Volumen des Ellipsoids K bezeichnet. Für gerades d ist also $V_d^{(d-1)}(K)/V(K)$ rational und für ungerades d wegen $(m-1/2)! = \sqrt{\pi} (2m)!/2^{2m} m!$ ein rationales Vielfaches von $\pi^{-(d-1)}$. Dieses schöne Resultat stammt von Kingman [7]. Weiteres hat Groemer [3, 4] nachgewiesen, dass $V_n^{(d)}(K)$ bei festem d und festem n genau dann sein Minimum unter allen konvexen Körpern K gleichen Volumens annimmt, wenn K ein Ellipsoid ist. Einen Überblick über verwandte Resultate findet man bei Gruber [5], Kendall und Moran [6], Klee [8] und Reed [9].

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass für beliebige ebene konvexe Körper K

$$V_4^{(2)}(K) = 2 V_3^{(2)}(K)$$

und für beliebige dreidimensionale konvexe Körper K

$$V_5^{(3)}(K) = \frac{5}{2} V_4^{(3)}(K)$$

erfüllt ist.

Satz 1. *Es sei K ein ebener konvexer Körper. Dann gilt:*

$$V_4^{(2)}(K) = 2 V_3^{(2)}(K).$$

Beweis: O.B.d.A. sei der Flächeninhalt von K gleich 1. Es bezeichne $E_{n+1}^{(2)}(K)$ den Erwartungswert der Eckpunktanzahl der konvexen Hülle H_{n+1} von $n+1$ in K zufällig und unabhängig voneinander gewählten Punkten. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer dieser Punkte Eckpunkt von H_{n+1} ist, stimmt mit der Wahrscheinlichkeit überein, dass dieser Punkt nicht in der konvexen Hülle H_n der übrigen n Punkte liegt, was mit Wahrscheinlichkeit $1 - V_n^{(2)}(K)$ der Fall ist. Da alle Punkte unabhängig und identisch verteilt sind, folgt $E_{n+1}^{(2)}(K) = (n+1)(1 - V_n^{(2)}(K))$ beziehungsweise

$$V_n^{(2)}(K) = 1 - \frac{1}{n+1} E_{n+1}^{(2)}(K).$$

Die Anzahl der Eckpunkte von H_{n+1} ist zugleich die Anzahl der Seiten von H_{n+1} . Die Verbindungsstrecke $P_1 P_2$ zweier Zufallspunkte P_1 und P_2 ist Seite von H_{n+1} , wenn alle übrigen $n-1$ Punkte auf ein und derselben Seite der Gerade $g(P_1, P_2)$ durch P_1 und P_2 liegen, was mit Wahrscheinlichkeit $\tilde{V}^{n-1} + (1 - \tilde{V})^{n-1}$ der Fall ist, wobei $\tilde{V} = \tilde{V}(P_1, P_2)$ den durch $g(P_1, P_2)$ abgetrennten kleineren Flächeninhalt bezeichnet. (Die Wahrscheinlichkeit, dass drei Punkte auf einer Geraden liegen, ist null.) Da es $\binom{n+1}{2}$ Möglichkeiten gibt, aus $n+1$ Punkten zwei auszuwählen, und die Punkte unabhängig und identisch verteilt sind, folgt

$$E_{n+1}^{(2)}(K) = \binom{n+1}{2} \int_K \int_K [\tilde{V}^{n-1} + (1 - \tilde{V})^{n-1}] dP_1 dP_2,$$

$$V_n^{(2)}(K) = 1 - \frac{n}{2} \int_K \int_K [\tilde{V}^{n-1} + (1 - \tilde{V})^{n-1}] dP_1 dP_2.$$

Aus dieser Darstellung erhalten wir

$$\begin{aligned}
 V_4^{(2)}(K) &= 1 - 2 \int_K \int_K [\tilde{V}^3 + (1 - \tilde{V})^3] dP_1 dP_2 \\
 &= 1 - 3 \int_K \int_K \left[\tilde{V}^2 + (1 - \tilde{V})^2 - \frac{1}{3} \right] dP_1 dP_2 \\
 &= 2 \left(1 - \frac{3}{2} \int_K \int_K [\tilde{V}^2 + (1 - \tilde{V})^2] dP_1 dP_2 \right) \\
 &= 2 V_3^{(2)}(K).
 \end{aligned}$$

Satz 2. *Es sei K ein dreidimensionaler konvexer Körper. Dann gilt:*

$$V_5^{(3)}(K) = \frac{5}{2} V_4^{(3)}(K).$$

Beweis: Wir nehmen wieder o.B.d.A. an, dass das Volumen von K gleich 1 ist. Es bezeichne $E_{n+1}^{(3)}(K)$ den Erwartungswert der Eckpunktanzahl und $F_{n+1}^{(3)}(K)$ den Erwartungswert der Facettenanzahl der konvexen Hülle H_{n+1} von $n+1$ in K zufällig und unabhängig voneinander gewählten Punkten. Ähnlich wie im Beweis von Satz 1 zeigt man

$$\begin{aligned}
 V_n^{(3)}(K) &= 1 - \frac{1}{n+1} E_{n+1}^{(3)}(K), \\
 F_{n+1}^{(3)}(K) &= \binom{n+1}{3} \int_K \int_K \int_K [\tilde{V}^{n-2} + (1 - \tilde{V})^{n-2}] dP_1 dP_2 dP_3,
 \end{aligned}$$

wobei $\tilde{V} = \tilde{V}(P_1, P_2, P_3)$ das Volumen des durch die Ebene durch P_1, P_2 und P_3 von K abgetrennten kleineren Teils bezeichnet. Da H_{n+1} fast sicher simplizial ist, beträgt die Kantenanzahl fast sicher das $3/2$ -fache der Facettenanzahl. Aus der Eulerschen Polyederformel folgt daher

$$E_{n+1}^{(3)}(K) = \frac{1}{2} F_{n+1}^{(3)}(K) + 2,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
 V_n^{(3)}(K) &= 1 - \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2} F_{n+1}^{(3)}(K) + 2 \right) \\
 &= 1 - \frac{2}{n+1} - \frac{(n-1)n}{12} \int_K \int_K \int_K [\tilde{V}^{n-2} + (1 - \tilde{V})^{n-2}] dP_1 dP_2 dP_3.
 \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich

$$\begin{aligned}
 V_5^{(3)}(K) &= \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \int \int \int_{KKK} [\tilde{V}^3 + (1 - \tilde{V})^3] dP_1 dP_2 dP_3 \\
 &= \frac{2}{3} - \frac{5}{2} \int \int \int_{KKK} \left[\tilde{V}^2 + (1 - \tilde{V})^2 - \frac{1}{3} \right] dP_1 dP_2 dP_3 \\
 &= \frac{5}{2} \left(\frac{3}{5} - \int \int \int_{KKK} [\tilde{V}^2 + (1 - \tilde{V})^2] dP_1 dP_2 dP_3 \right) \\
 &= \frac{5}{2} V_4^{(3)}(K).
 \end{aligned}$$

C. Buchta, Institut für Analysis, Technische Mathematik und
Versicherungsmathematik, Technische Universität Wien

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 C. Buchta: Zufallspolygone in konvexen Vielecken. J. reine angew. Math., im Druck.
- 2 C. Buchta: Das Volumen von Zufallspolyedern im Ellipsoid. Eingereicht.
- 3 H. Groemer: On some mean values associated with a randomly selected simplex in a convex set. Pacific J. Math. 45, 525-533 (1973).
- 4 H. Groemer: On the mean value of the volume of a random polytope in a convex set. Arch. Math. 25, 86-90 (1974).
- 5 P.M. Gruber: Approximation of convex bodies. In: P.M. Gruber, J.M. Wills, ed.: Convexity and its applications. Birkhäuser, Basel 1983.
- 6 M.G. Kendall und P.A.P. Moran: Geometrical probability. Griffin, London 1963.
- 7 J.F.C. Kingman: Random secants of a convex body. J. Appl. Prob. 6, 660-672 (1969).
- 8 V. Klee: What is the expected volume of a simplex whose vertices are chosen at random from a given convex body? Am. Math. Monthly 76, 286-288 (1969).
- 9 W.J. Reed: Random points in a simplex. Pacific J. Math. 54, 183-198 (1974).