

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 38 (1983)
Heft: 6

Artikel: Zerlegung von regulären $2n$ -Ecken
Autor: Pfeiffer, H. / Romer, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-37200>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

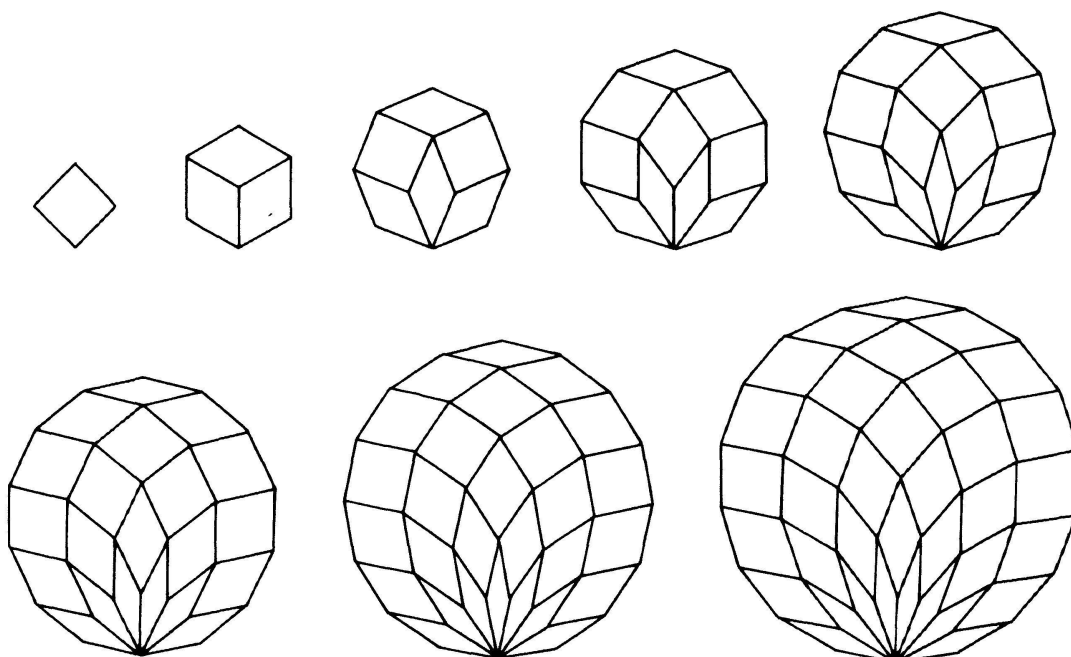
Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Elementarmathematik und Didaktik

Zerlegung von regulären $2n$ -Ecken

Im Rahmen einer experimentellen Untersuchung über Tragwerke von Sonnenspiegeln entdeckten wir eine interessante Eigenschaft regulärer $2n$ -Ecke:



Figur 1

Ein reguläres $2n$ -Eck kann in $\binom{n}{2}$ Rhomben gleicher Seitenlänge zerlegt werden (Fig. 1).

Dieses Rhomben-Puzzle streift verschiedene Gebiete des Elementarunterrichts: Symmetrien, Kombinatorik, Flächenzerlegung, arithmetische Folgen.

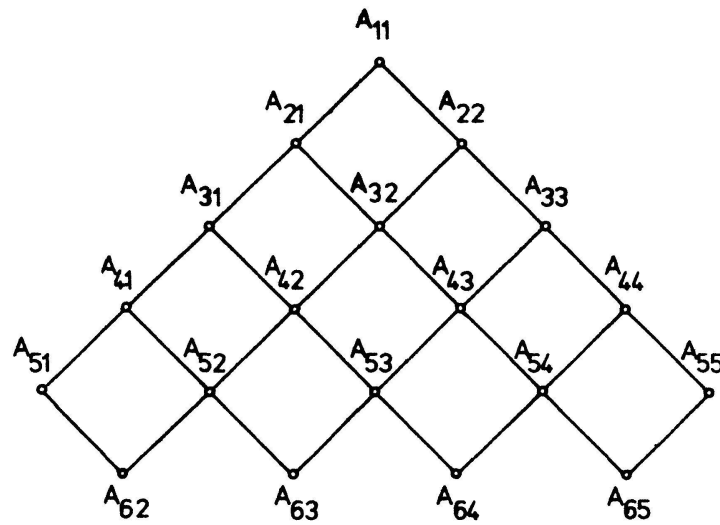
Zum Beweis der Zerlegungseigenschaft denken wir uns ein ebenes Gelenkmodell gemäss Figur 2 (Figur für $n=5$) mit Gelenken in den Punkten A_{ij} und gleich langen Stangen dazwischen. Im Rhombus $A_{ij}A_{i+1,j}A_{i+2,j+1}A_{i+1,j+1}$ (Fig. 3) führen wir die Winkel α_{ij} und β_{ij} ein. Wir deformieren nun das Gelenkmodell so, dass

$$\alpha_{i,j} = \left(1 - \frac{i}{n}\right)\pi \quad \text{und} \quad \beta_{i,j} = \frac{i}{n}\pi.$$

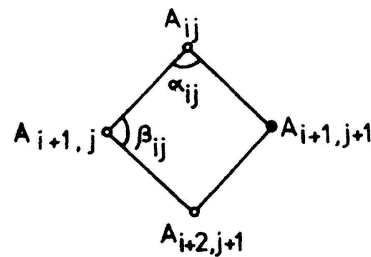
Dies ist widerspruchsfrei möglich, weil sich für einen *innern Punkt* $A_{i,j}$ die Winkelsumme

$$\begin{aligned} &\alpha_{i,j} + \beta_{i-1,j} + \alpha_{i-2,j-1} + \beta_{i-1,j-1} \\ &= \left(1 - \frac{i}{n}\right)\pi + \frac{i-1}{n}\pi + \left(1 - \frac{i-2}{n}\right)\pi + \frac{i-1}{n}\pi = 2\pi \end{aligned}$$

ergibt.



Figur 2



Figur 3

In den *Randpunkten* erhält man folgende Innenwinkel:

a) Der Randpunkt A_{11} hat den Innenwinkel

$$\alpha_{1,1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\pi.$$

b) In den Randpunkten $A_{i,1}$, $i \in \{2, \dots, n-1\}$ erhält man den Innenwinkel

$$\alpha_{i,1} + \beta_{i-1,1} = \left(1 - \frac{i}{n}\right)\pi + \frac{i-1}{n}\pi = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\pi.$$

Analog verfährt man für die Randpunkte $A_{i,i}$, $i \in \{2, \dots, n-1\}$.

c) In den Randpunkten $A_{n,1}$ und $A_{n,n}$ erhält man die Innenwinkel

$$\beta_{n-1,1} = \beta_{n-1,n-1} = \frac{n-1}{n}\pi = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\pi.$$

d) Wegen

$$\alpha_{n,j} = \left(1 - \frac{n}{n}\right)\pi = 0.$$

fallen die Punkte $A_{n+1,2}, \dots, A_{n+1,n}$ zusammen. In diesem Punkt erhält man den Innenwinkel

$$(n-1)\alpha_{n-1,j} = (n-1) \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \pi = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \pi.$$

Das deformierte Gelenkmodell bildet also ein regelmässiges $2n$ -Eck.

Wir danken Herrn H. Walser (Frauenfeld) für die grosszügige Mithilfe bei der Überarbeitung des Aufsatzes; die originelle Idee des Gelenkmodells stammt von ihm.

H. Pfeiffer und A. Romer, Minusio

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/83/060157-03\$1.50 + 0.20/0

Ein Zerlegungssatz für punktsymmetrische konvexe Vielecke

Ein punktsymmetrisches Vieleck hat eine gerade Eckenzahl. Wir bezeichnen die $2n$ -Ecken ($n \geq 2$) mit $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ und beweisen mit Induktion nach n folgenden Satz:

Ein punktsymmetrisches konvexes $2n$ -Eck ist in $\binom{n}{2}$ Parallelogramme zerlegbar.

I. Für $n = 2$ ist der Satz trivial.

II. Der Satz sei wahr für $(n - 1)$.

Wir verschieben nun die Ecken B_1, \dots, B_n um den Vektor $\vec{a}_1 = \overrightarrow{B_n A_1}$ und erhalten mit den Bildpunkten B'_1, \dots, B'_n eine Zerlegung des $2n$ -Eckes in $(n - 1)$ Parallelogramme $B_k B_{k+1} B'_{k+1} B'_k$, $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ und ein $2(n - 1)$ -Eck $A_1, \dots, A_n = B'_1, \dots, B'_n = A_1$. Dieses $2(n - 1)$ -Eck ist als Durchschnitt der beiden $2n$ -Ecke $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ und $A'_1, \dots, A'_n, B'_1, \dots, B'_n$ ebenfalls konvex; ferner hat es ein Symmetriezentrum, nämlich das um $a_1/2$ verschobene Symmetriezentrum des ursprünglichen $2n$ -Eckes.

Das $2(n - 1)$ -Eck ist also nach Induktionsvoraussetzung in $\binom{n-1}{2}$ Parallelogramme zerlegbar. Damit ist das $2n$ -Eck in $(n - 1) + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{2}$ Parallelogramme zerlegbar.

Zusätze

1. Es sei $\vec{a}_1 = \overrightarrow{B_n A_1}$, $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_1 A_2}$, ..., $\vec{a}_k = \overrightarrow{A_{k-1} A_k}$, ..., $\vec{a}_n = \overrightarrow{A_{n-1} A_n}$.

Die $\binom{n}{2}$ Parallelogramme der Zerlegung sind diejenigen Parallelogramme, welche durch je zwei Vektoren aus $\{a_1, \dots, a_n\}$ aufgespannt werden.