Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 38 (1983)
Heft: 6

Artikel: Ein Zerlegungssatz für punktsymmetrische konvexe Vielecke
Autor: Walser, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37201

fallen die Punkte $A_{n+1,2},\ldots,A_{n+1,n}$ zusammen. In diesem Punkt erhält man den Innenwinkel

$$(n-1)\alpha_{n-1,j}=(n-1)\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\pi=\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi.$$

Das deformierte Gelenkmodell bildet also ein regelmässiges $2n$-Eck.

Wir danken Herrn H. Walser (Frauenfeld) für die grosszügige Mithilfe bei der Überarbeitung des Aufsatzes; die originelle Idee des Gelenkmodells stammt von ihm.

H. Pfeiffer und A. Romer, Minusio

 0013-6018/83/060157-03$1.50+0.20/0

Ein Zerlegungssatz für punktsymmetrische konvexe Vielecke

Ein punktsymmetrisches Vieleck hat eine gerade Eckenzahl. Wir bezeichnen die $2n$-Ecken ($n\geq 2$) mit $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n$ und beweisen mit Induktion nach n folgenden Satz:

Ein punktsymmetrisches konvexes $2n$-Eck ist in $\binom{n}{2}$ Parallelogramme zerlegbar.

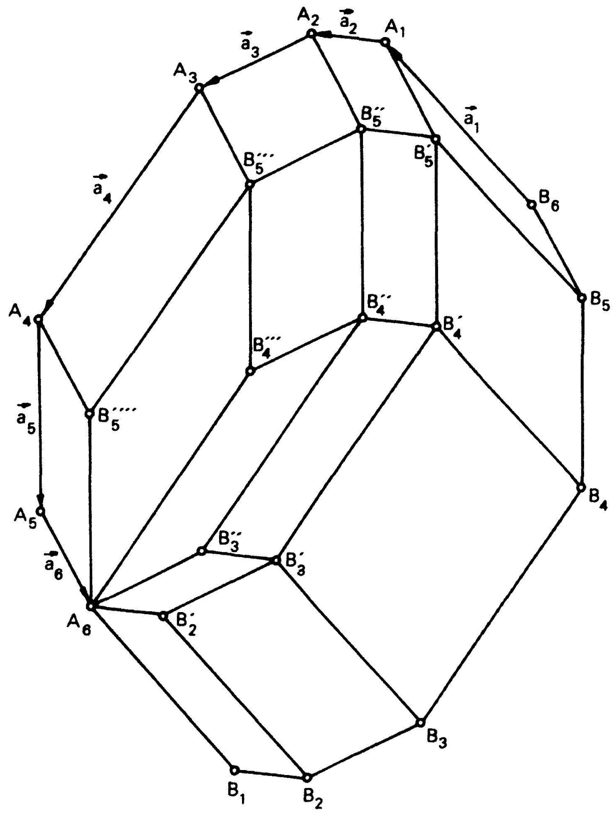
I. Für $n=2$ ist der Satz trivial.
II. Der Satz sei wahr für $(n-1)$.
Wir verschieben nun die Ecken $B_1,\ldots,B_n$ um den Vektor $\vec{a}_1=\overrightarrow{B_nA_1}$ und erhalten mit den Bildpunkten $B_1',\ldots,B_n'$ eine Zerlegung des $2n$-Eckes in $(n-1)$ Parallelogramme $B_kB_{k+1}B_{k+1}'B_k'$, $k\in\{1,\ldots,n-1\}$ und ein $2(n-1)$-Eck $A_1,\ldots,A_n=B_1',\ldots,B_n'=A_1$. Dieses $2(n-1)$-Eck ist als Durchschnitt der beiden $2n$-Ecke $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n$ und $A_1',\ldots,A_n',B_1',\ldots,B_n'$ ebenfalls konvex; ferner hat es ein Symmetriezentrum, nämlich das um $a_1/2$ verschobene Symmetriezentrum des ursprünglichen $2n$-Eckes.

Das $2(n-1)$-Eck ist also nach Induktionsvoraussetzung in $\binom{n-1}{2}$ Parallelogramme zerlegbar. Damit ist das $2n$-Eck in $(n-1)+\binom{n-1}{2}=\binom{n}{2}$ Parallelogramme zerlegbar.

Zusätze

1. Es sei $\vec{a}_1=\overrightarrow{B_nA_1}$, $\vec{a}_2=\overrightarrow{A_1A_2}$, ..., $\vec{a}_k=\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$, ..., $\vec{a}_n=\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$.

Die $\binom{n}{2}$ Parallelogramme der Zerlegung sind diejenigen Parallelogramme, welche durch je zwei Vektoren aus $\{a_1,\ldots,a_n\}$ aufgespannt werden.



2. Ist das $2n$-Eck gleichseitig, so erhält man eine Zerlegung in Rhomben. Dies gilt insbesondere für regelmässige $2n$-Ecke.

H. Walser, Frauenfeld

 0013-6018/83/060159-02$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 888. Für beliebige $n \in N$ und $x \neq m\pi/2, m \in \mathbf{Z}$, beweise man

$$[(\sec x)^{2n}-1][(\operatorname{cosec} x)^{2n}-1] \geq n^2 \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k}\right)^{2/n}.$$

M. Bence, Brasow, Rumänien

Lösung mit Verschärfung: Wir beweisen (unter denselben Voraussetzungen) die wesentlich schärfere Ungleichung

$$[(\sec x)^{2n}-1][(\operatorname{cosec} x)^{2n}-1] \geqslant (2^n-1)^2$$

mit Gleichheit genau für $x = \pm \dfrac{\pi}{4} + m\pi, m \in \mathbf{Z}$. Dazu setzen wir $t := \sin^2 x$ und betrachten die Funktion f mit

$$f(t) := [t^{-n}-1][(1-t)^{-n}-1], \qquad 0 < t < 1.$$