

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Band: 38 (1983)
Heft: 6

Artikel: Ein Zerlegungssatz für punktsymmetrische konvexe Vielecke
Autor: Walser, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-37201>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 09.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

fallen die Punkte $A_{n+1,2}, \dots, A_{n+1,n}$ zusammen. In diesem Punkt erhält man den Innenwinkel

$$(n-1)\alpha_{n-1,j} = (n-1) \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \pi = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \pi.$$

Das deformierte Gelenkmodell bildet also ein regelmässiges $2n$ -Eck.

Wir danken Herrn H. Walser (Frauenfeld) für die grosszügige Mithilfe bei der Überarbeitung des Aufsatzes; die originelle Idee des Gelenkmodells stammt von ihm.

H. Pfeiffer und A. Romer, Minusio

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/83/060157-03\$1.50 + 0.20/0

Ein Zerlegungssatz für punktsymmetrische konvexe Vielecke

Ein punktsymmetrisches Vieleck hat eine gerade Eckenzahl. Wir bezeichnen die $2n$ -Ecken ($n \geq 2$) mit $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ und beweisen mit Induktion nach n folgenden Satz:

Ein punktsymmetrisches konvexes $2n$ -Eck ist in $\binom{n}{2}$ Parallelogramme zerlegbar.

I. Für $n = 2$ ist der Satz trivial.

II. Der Satz sei wahr für $(n - 1)$.

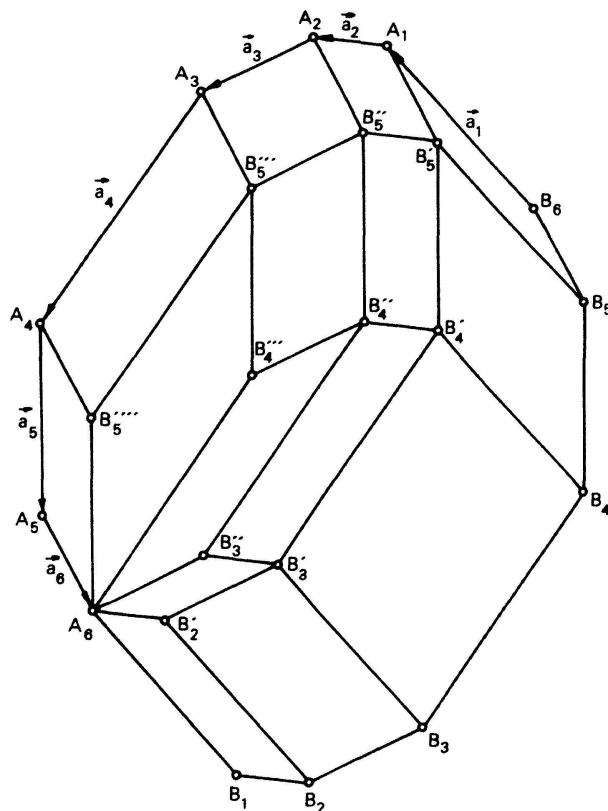
Wir verschieben nun die Ecken B_1, \dots, B_n um den Vektor $\vec{a}_1 = \overline{B_n A_1}$ und erhalten mit den Bildpunkten B'_1, \dots, B'_n eine Zerlegung des $2n$ -Eckes in $(n - 1)$ Parallelogramme $B_k B_{k+1} B'_{k+1} B'_k$, $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ und ein $2(n - 1)$ -Eck $A_1, \dots, A_n = B'_1, \dots, B'_n = A_1$. Dieses $2(n - 1)$ -Eck ist als Durchschnitt der beiden $2n$ -Ecke $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ und $A'_1, \dots, A'_n, B'_1, \dots, B'_n$ ebenfalls konvex; ferner hat es ein Symmetriezentrum, nämlich das um $a_1/2$ verschobene Symmetriezentrum des ursprünglichen $2n$ -Eckes.

Das $2(n - 1)$ -Eck ist also nach Induktionsvoraussetzung in $\binom{n-1}{2}$ Parallelogramme zerlegbar. Damit ist das $2n$ -Eck in $(n - 1) + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{2}$ Parallelogramme zerlegbar.

Zusätze

1. Es sei $\vec{a}_1 = \overline{B_n A_1}$, $\vec{a}_2 = \overline{A_1 A_2}$, ..., $\vec{a}_k = \overline{A_{k-1} A_k}$, ..., $\vec{a}_n = \overline{A_{n-1} A_n}$.

Die $\binom{n}{2}$ Parallelogramme der Zerlegung sind diejenigen Parallelogramme, welche durch je zwei Vektoren aus $\{a_1, \dots, a_n\}$ aufgespannt werden.



2. Ist das $2n$ -Eck gleichseitig, so erhält man eine Zerlegung in Rhomben. Dies gilt insbesondere für regelmässige $2n$ -Ecke.

H. Walser, Frauenfeld

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/83/060159-02\$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 888. Für beliebige $n \in \mathbf{N}$ und $x \neq m\pi/2, m \in \mathbf{Z}$, beweise man

$$[(\sec x)^{2n} - 1][(\operatorname{cosec} x)^{2n} - 1] \geq n^2 \prod_{k=1}^n \left(\frac{n}{k}\right)^{2/n}.$$

M. Bence, Brasow, Rumänien

Lösung mit Verschärfung: Wir beweisen (unter denselben Voraussetzungen) die wesentlich schärfere Ungleichung

$$[(\sec x)^{2n} - 1][(\operatorname{cosec} x)^{2n} - 1] \geq (2^n - 1)^2$$

mit Gleichheit genau für $x = \pm \frac{\pi}{4} + m\pi, m \in \mathbf{Z}$. Dazu setzen wir $t := \sin^2 x$ und betrachten die Funktion f mit

$$f(t) := [t^{-n} - 1][(1-t)^{-n} - 1], \quad 0 < t < 1.$$