

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 38 (1983)  
**Heft:** 6

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

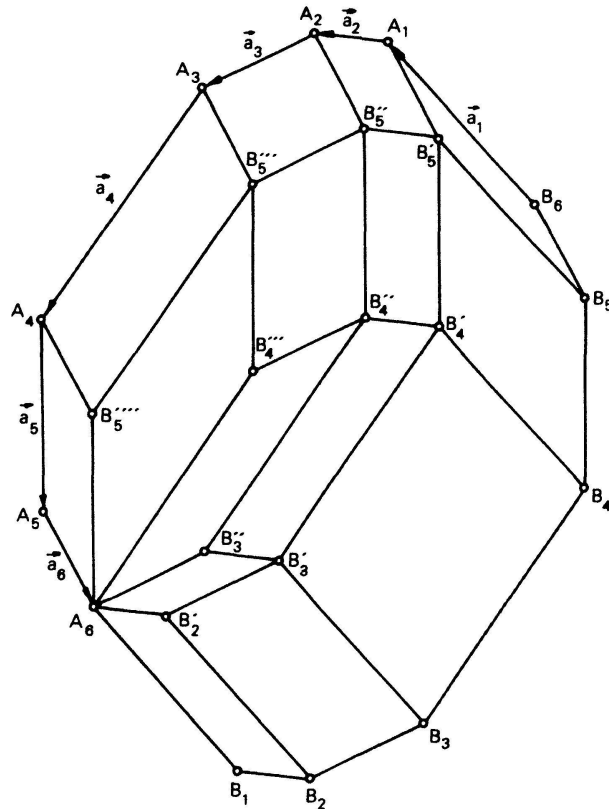
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**



2. Ist das  $2n$ -Eck gleichseitig, so erhält man eine Zerlegung in Rhomben. Dies gilt insbesondere für regelmässige  $2n$ -Ecke.

H. Walser, Frauenfeld

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/83/060159-02\$1.50+0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 888.** Für beliebige  $n \in \mathbf{N}$  und  $x \neq m\pi/2, m \in \mathbf{Z}$ , beweise man

$$[(\sec x)^{2n} - 1][(\operatorname{cosec} x)^{2n} - 1] \geq n^2 \prod_{k=1}^n \left(\frac{n}{k}\right)^{2/n}.$$

M. Bence, Brasow, Rumänien

**Lösung mit Verschärfung:** Wir beweisen (unter denselben Voraussetzungen) die wesentlich schärfere Ungleichung

$$[(\sec x)^{2n} - 1][(\operatorname{cosec} x)^{2n} - 1] \geq (2^n - 1)^2$$

mit Gleichheit genau für  $x = \pm \frac{\pi}{4} + m\pi, m \in \mathbf{Z}$ . Dazu setzen wir  $t := \sin^2 x$  und betrachten die Funktion  $f$  mit

$$f(t) := [t^{-n} - 1][(1-t)^{-n} - 1], \quad 0 < t < 1.$$

Man bestätigt leicht, dass  $f'(t)$  in  $]0, 1[$  nur bei  $t = 1/2$  verschwindet. Unter Beachtung von

$$\lim_{t \downarrow 0} f(t) = \lim_{t \uparrow 1} f(t) = \infty$$

ergibt sich daraus, dass  $f$  bei  $t = 1/2$  das Minimum  $f(1/2) = (2^n - 1)^2$  annimmt. Es bleibt zu zeigen, dass

$$(2^n - 1)^n \geq n^{2^n}/n! \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N}.$$

Dies ist wahr für  $n = 1, 2, 3$ . Für  $n \geq 4$  folgt es aus  $n! > (n/e)^n$  sowie  $2^n > 1 + ne$ .

V. D. Mascioni, Origlio

Weitere Lösungen sandten K. Bickel (Freiburg, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Filep (Nyiregyháza, Ungarn), A.A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), M.S. Klamkin (Edmonton, Kanada), L. Kuipers (Sierre), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), J.B.M. Melissen (Rheden, NL), D.M. Milošević (Pranjani, YU), A. Varcza (Nyiregyháza, Ungarn), M. Vowe (Therwil), C. Wildhagen (Breda, NL).

**Aufgabe 889.**  $\alpha, \beta, \gamma$  seien die Innenwinkel eines ebenen Dreiecks mit Um- bzw. Inradius  $R$  bzw.  $r$ . Für variablen Winkel  $\varphi$  definiere man

$$F(\varphi) := \frac{\cot(\varphi/2) + \cot(\alpha/2) \cot(\beta/2) / \cot(\gamma/2)}{-\sin \varphi + 2 \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) / \cos(\gamma/2)}.$$

Man zeige, dass  $F(\alpha) = F(\beta) = F(\gamma) = f(R, r)$  und berechne  $f$ .

I. Paasche, München, BRD

Lösung: Es ist

$$F(\varphi) = \frac{\cos(\varphi/2) \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \cos(\gamma/2) + \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) \sin(\gamma/2) \sin(\varphi/2)}{2 \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) \sin(\varphi/2) - 2 \sin^2(\varphi/2) \cos(\varphi/2) \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \cos(\gamma/2)}$$

und eine elementare Rechnung zeigt:

$$F(\alpha) = F(\beta) = F(\gamma) = (2 \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2))^{-1} = 2R/r.$$

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

**Bemerkung der Redaktion.** Einige Leser übersahen die Bruchstriche in Zähler und Nenner von  $F(\varphi)$ , vermuteten einen Druckfehler und betrachteten statt  $F$  die Funktion

$$G(\varphi) := \frac{\cot(\varphi/2) + \cot(\alpha/2) \cot(\beta/2) \cot(\gamma/2)}{-\sin \varphi + 4 \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2)}.$$

Dabei ergab sich:  $G(a) = G(\beta) = G(\gamma) = 2R/r$ .

G. Bercea (München, BRD) zeigte allgemeiner: Sind  $k_1, k_2, k_3, k_4$  reelle Konstanten mit  $k_1 k_4 + 2 k_2 k_3 + 2 k_3 k_1 = 0$  und

$$H(\varphi) := \frac{k_1 \cot(\varphi/2) + k_2 \cot(a/2) \cot(\beta/2) \cot(\gamma/2)}{k_3 \sin \varphi + k_4 \cos(a/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2)},$$

so gilt  $H(a) = H(\beta) = H(\gamma) = (-k_1/k_3)(2R/r)$ .

Weitere Lösungen sandten S.Z. Arslanagic (Trebinje, YU), A. Bager (Hjørring, DK), P. Bundschuh (Köln, BRD), J. T. Groenman (Arnhem, NL), H. Egli (Zürich), W. Janous (Innsbruck, A), M. S. Klamkin (Edmonton, Kanada), L. Kuipers (Sierre), A. Makowski (Warsaw, Polen), V. D. Mascioni (Origlio), Hj. Stocker (Wädenswil), W. A. Van der Spek (Nordbergum, NL), M. Vowe (Therwil).

**Aufgabe 890.** Es seien  $h_i$  bzw.  $m_i$  die Höhen bzw. die Schwerelinien eines beliebigen Tetraeders ( $i = 1, 2, 3, 4$ ),  $V$  dessen Volumen. Man schätze

$$V^{-1} \left( \sum_{i=1}^4 h_i \right) \left( \sum_{i=1}^4 m_i^2 \right)$$

bestmöglich nach unten ab.

D. M. Milosevic, Pranjani, YU

Lösung: Bezeichnet  $F_i$  die Fläche desjenigen der vier das Tetraeder begrenzenden Dreiecke, auf dem  $h_i$  senkrecht steht, so ist  $3V = h_i F_i$  für  $i = 1, \dots, 4$  und somit nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$144 V^2 = \left( \sum h_i F_i \right)^2 \leq \left( \sum h_i \right) \left( \sum h_i F_i^2 \right) = 3V \left( \sum h_i \right) \left( \sum F_i \right),$$

also

$$48 V \leq \left( \sum h_i \right) \left( \sum F_i \right). \quad (1)$$

Gleichheit gilt hier genau dann, wenn  $F_1 = \dots = F_4$  ist. Sind  $A, B, C, D$  die Eckpunkte des Tetraeders und wird

$$a := DA, \quad b := DB, \quad c := DC, \quad d := AB, \quad e := BC, \quad f := CA$$

gesetzt, so hat man z. B. für die vom Punkt  $D$  ausgehende Schwerlinie  $m$

$$\begin{aligned} 9m^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos(a, b) + 2bc \cos(b, c) + 2ca \cos(c, a) \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2) - (d^2 + e^2 + f^2). \end{aligned}$$

Zyklische Vertauschung und Addition der vier Gleichungen führt zu

$$9 \sum m_i^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2). \quad (2)$$

Z. B. gilt für die Fläche  $F$  des Dreiecks  $ABD$  nach [1], S. 42,

$$4\sqrt{3} F \leq a^2 + b^2 + d^2; \quad (3)$$

zyklische Vertauschung und Addition der vier Ungleichungen führt hier zu

$$4\sqrt{3} \sum F_i \leq 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2).$$

Mit (1) und (2) ergibt sich hieraus

$$48 V \leq (3\sqrt{3}/8) (\sum h_i) (\sum m_i^2),$$

und so ist der Ausdruck in der Aufgabenstellung stets mindestens  $128/\sqrt{3}$ , und dieser Wert wird angenommen genau dann, wenn das Tetraeder regulär ist. In (3) gilt Gleichheit nämlich genau für  $a=b=d$  und die analogen Aussagen bezüglich der Dreiecke  $ABC$  bzw.  $ACD$  führen zu  $d=e=f$  bzw.  $a=c=f$ , was bereits die Regularität des Tetraeders beinhaltet.

P. Bundschuh, Köln, BRD

#### LITERATURVERZEICHNIS

1 O. Bottema et al.: Geometric inequalities. Wolters-Noordhoff, Groningen 1969.

Weitere Lösungen sandten S.Z. Arslanagic (Trebinje, YU), M.S. Klamkin (Edmonton, Kanada), O.P. Lossers (Eindhoven, NL).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis *10. Juni 1984* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem...A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S.67), Problem 625 B (Band 25, S.68), Problem 645 A (Band 26, S.46), Problem 672 A (Band 27, S.68), Aufgabe 680 (Band 27, S.116), Problem 724 A (Band 30, S.91), Problem 764 A (Band 31, S.44), Problem 862 A (Band 36, S.68).

**Aufgabe 902.** Give a proof for the following generalisation of Aufgabe 890: Let  $h_i$  and  $m_i (i=0, \dots, n; n \geq 3)$  be the heights and the medians of an  $n$ -dimensional simplex, respectively, and let  $V$  be its volume. Then

$$V^{-1} \left( \sum_{i=0}^n h_i \right) \left( \sum_{i=0}^n m_i^{n-1} \right) \geq n! (n+1)^{(n+3)/2} n^{-n/2}$$

with equality if and only if the simplex is regular.

M. S. Klamkin, Edmonton, Canada

**Aufgabe 903.** Eine Ellipse  $E$  habe folgende Eigenschaft: Es gibt eine endliche Folge  $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$  von  $E$  einbeschriebenen und zu  $E$  ähnlichen Ellipsen derart, dass  $E_1$  und  $E_n$  die Ellipse  $E$  in deren Hauptscheiteln hyperoskulieren, während jede der übrigen  $E_i$  ihre beiden Nachbarn  $E_{i-1}, E_{i+1}$  in ihren Nebenscheiteln und  $E$  in zwei Punkten berührt. Man bestimme die numerische Exzentrizität von  $E$ .

C. Bindschedler, Küsnacht

## Literaturüberschau

G.S. Gill: Applications of Calculus to accompany «Calculus of One and Several Variables» (von S.L. Salas und E. Hille). V und 200 Seiten, US-\$ 7.15. John Wiley & Sons, New York 1979.

Ce livre donne essentiellement les solutions des exercices de l'ouvrage cité dans le titre.

M.A. Knus

H. Gross: Quadratic Forms in Infinite Dimensional Vector Spaces. XII und 419 Seiten, Fr.38.-. Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart 1979.

Beaucoup de résultats classiques sur les formes quadratiques en dimension finie ont été généralisés à des espaces de dimension infinie ces dernières années par l'auteur et ses élèves. Ce livre présente de façon systématique la partie de ces recherches valable pour des espaces de dimension dénombrable. Une des questions essentielles de cette théorie est la caractérisation des sous-espaces des espaces quadratiques, en particulier l'étude des différentes généralisations possibles du théorème de Witt.

M.A. Knus

M.I. Kargapolov und J.I. Merzljakov: Fundamentals of the Theory of Groups. Englische Übersetzung der 2. russischen Auflage von R.G. Burns. Graduate Texts in Mathematics, Band 62. XVII und 203 Seiten, DM 35.-. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1979.

Unter der Voraussetzung, dass der Leser die wichtigsten Grundbegriffe der Algebra kennt, wird er von den Autoren mit wichtigen Teilen der Gruppentheorie soweit bekannt gemacht, dass er aus eigener Kraft den Anschluss an die entsprechenden Forschungsgebiete finden kann. Allgemeine Sachverhalte werden an konkreten Beispielen wie Zahlen, Permutationsgruppen, Matrizen Gruppen beobachtet oder zur Verdeutlichung illustriert. Die sehr geschickt gewählten Übungsaufgaben und Beispiele verleihen dem Leser Sachkenntnis und Spürsinn dank persönlicher Erfahrung.

Aus der Themenwahl seien besonders erwähnt: Gruppenvarietäten, nilpotente und auflösbare Gruppen und Verallgemeinerungen, Einbettungen in lineare Gruppen. Dabei tritt eine Arbeits- und Denkweise hervor, die sich an Mal'cevs Pionierarbeit anlehnt und vornehmlich Hilfsmittel aus der Logik, Ringtheorie und Zahlentheorie verwendet. Die eher geometrisch orientierte Strukturtheorie, amalgamierte Produkte, HNN-Erweiterungen werden kaum erwähnt. Dafür werden die angesprochenen Themen in einer beachtlichen Kombination von Tiefe und Kürze sehr lesenswert dargestellt.

H. Schneebeili

P.J. Davis: Circulant Matrices. XV und 250 Seiten, US-\$25.50. John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto 1979.

The main topic of this well written book is the study of certain linear matrix equations: Given complex  $n \times n$  matrices  $A_i, B_i, 1 \leq i \leq k$  and  $C$ , find all  $n \times n$  matrices  $X$  satisfying  $A_1XB_1 + \dots + A_kXB_k = C$ . This is, in general, a formidable task, and the author sets out with a presentation of the simplest nontrivial example, the theory of circulant matrices. A circulant matrix is one whose rows are all identical, except for a cyclic shift in position. In other words, let  $\pi$  be the  $n \times n$  permutation matrix, which arises from the unit matrix by moving the top row to the bottom and every other row one step up. A matrix  $X$  is called circulant if it satisfies  $\pi X = X\pi$ . Here is a brief outline of the content of the book. Chapter 1 presents some questions of planar geometry and of stability theory, leading to the study of circulant matrices.