

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 40 (1985)
Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Aufgaben

Aufgabe 904. Für beliebige $x \in \mathbf{R}$ und $n \in \mathbf{N}_0$ werte man die Summe

$$S(x, n) := \sum_{i=0}^n \left\{ \binom{x+n+i}{i} 2^{-i} - \binom{x+n+i+1}{i} 2^{-i-1} \right\}$$

geschlossen aus.

L. Kuipers, Sierre

Lösung (mit Verallgemeinerung): Wir zeigen, dass die reellen Polynomfunktionen n -ten Grades mit der Variablen x

$$S(x, n, r) = \sum_{i=0}^n \left\{ \binom{x+n+i}{i} r^{-i} - (r-1) \binom{x+n+i+1}{i} r^{-i-1} \right\}$$

und

$$T(x, n, r) = \binom{x+2n+1}{n} r^{-n-1} \quad (r \neq 0 \text{ eine reelle Konstante})$$

für alle natürlichen Argumente übereinstimmen und deshalb identisch sind.

Beweis: Für eine natürliche Zahl m ordnen wir der Zahlenfolge

$$a_i = \binom{m+n+i}{i} r^{-i} - (r-1) \binom{m+n+i+1}{i} r^{-i-1}$$

die formale Potenzreihe $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i y^i$ mit der Unbestimmten y zu. Der Koeffizient b_n in der formalen Potenzreihe $b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i y^i = \frac{1}{1-y} a$ ist dann $b_n = \sum_{i=0}^n a_i = S(m, n, r)$. In der bekannten Reihe

$$\frac{1}{(1-z)^s} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{s-1+i}{i} z^i$$

substituieren wir $z = yr^{-1}$, $s = m+n+1$ (bzw. $s = m+n+2$) und erhalten

$$a = \left(1 - \frac{y}{r}\right)^{-m-n-1} - \frac{r-1}{r} \left(1 - \frac{y}{r}\right)^{-m-n-2} = \frac{1-y}{r} \left(1 - \frac{y}{r}\right)^{m-n-2}.$$

Daraus gewinnen wir

$$b = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{y}{r}\right)^{-m-n-2} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m+n+1+i}{i} \frac{y^i}{r^{i+1}}$$

und lesen

$$b_n = S(m, n, r) = \binom{m + 2n + 1}{n} r^{-n-1} = T(m, n, r)$$

ab.

Für $r = 2$ wird die verlangte geschlossene Darstellung der Summe somit

$$S(x, n, 2) = \binom{x + 2n + 1}{n} 2^{-n-1}.$$

J. Binz, Bolligen

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD; 2 Lösungen), L. Cseh (Cluj, RO), K. Dilcher (Wabern), J. Escher (Zuchwil), A. A. Jagers (Enschede, NL), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), P. Streckeisen (Zürich), W. Volgmann (Bochum, BRD), M. Vowe (Therwil), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 905. Die Funktionen $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ und $g: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ seien stetig, und es gelte

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Man zeige, dass

$$\left(\int_0^1 f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \left\{ \int_0^1 (g(x))^2 dx - \left(\int_0^1 g(x) dx \right)^2 \right\} \int_0^1 (f(x))^2 dx.$$

Wann genau gilt Gleichheit?

U. Abel, Giessen, BRD

Lösung: Es sei

$$c = \int_0^1 g(x) dx.$$

Nach Cauchy-Schwarz gilt

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 f(x) \{g(x) - c\} dx \right)^2 &\leq \int_0^1 (f(x))^2 dx \int_0^1 (g(x) - c)^2 dx \\ &= \int_0^1 (f(x))^2 dx \left\{ \int_0^1 (g(x))^2 dx - \left(\int_0^1 g(x) dx \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

und Gleichheit gilt genau, wenn $g(x) - c = af(x)$ für eine Konstante a .

O. P. Lossers jr., Eindhoven

Bemerkungen der Redaktion: R. O. Davies und W. Janous weisen darauf hin, dass die Stetigkeitsvoraussetzung überflüssig ist. Die Ungleichung gilt allgemeiner bei Zugrundelegung des normierten Lebesguemasses. Nach V. D. Mascioni lässt sich sogar

$$\left(\int_0^1 fg\right)^2 \left(\int_0^1 h^2\right) \leq \left\{ \left(\int_0^1 g^2\right) \left(\int_0^1 h^2\right) - \left(\int_0^1 gh\right)^2 \right\} \int_0^1 f^2$$

für alle $f, g, h \in C_{\mathbb{R}} [0, 1]$ mit $\int_0^1 fh = 0$ zeigen.

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), R. O. Davies (Leicester, GB), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-wai Lau (Hongkong), V. D. Mascioni (Origlio), Chr. A. Meyer (Ittigen), H. J. Seiffert (Berlin, BRD), P. Streckeisen (Zürich), C. Wildhagen (Breda, NL), R. Wyss (Flumenthal).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis 10. August 1985 an Dr. H. Kappus. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68), Problem 872A (Band 36, S. 175).

Aufgabe 917. Man betrachte die Menge aller einem gegebenen Dreieck ABC eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecke $A'B'C'$ mit $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$ und den Seitenmitten $L \in B'C'$, $M \in C'A'$, $N \in A'B'$.

Man zeige: L, M, N liegen auf je einer festen Geraden l, m, n .

L. Kuipers, Sierre

Aufgabe 918. Die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ werde von n Kreisen k_i mit Radien r_i je in zwei Punkten berührt ($i = 1, \dots, n; n \geq 3$). Man bestimme r_1 als Funktion von n so, dass k_i seine beiden Nachbarkreise k_{i-1} und k_{i+1} berührt ($i = 2, \dots, n - 1$) und dass $r_n = r_1$ wird.

C. Bindschedler, Künsnacht

Aufgabe 919. Mit den üblichen Bezeichnungen für das ebene Dreieck (siehe O. Bottema et al., *Geometric Inequalities*, Groningen 1969) schätze man den Ausdruck

$$a \tan(\alpha/2) + b \tan(\beta/2) + c \tan(\gamma/2)$$

durch möglichst einfache Funktionsterme $f(r, R)$, $F(r, R)$ bestmöglich nach unten und oben ab.

D. M. Milosevic, Pranjani, YU