

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 40 (1985)  
**Heft:** 2

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Kleine Mitteilungen

### Varianten des Schwarzschen Lemma

Die Aufgabe 901 (El. Math., Vol. 38, Nr. 5, 1983) und deren Lösung (El. Math., Vol. 39, Nr. 5, 1984) haben mich auf einige Varianten des Schwarzschen Lemma gebracht, die ich nachfolgend beschreiben möchte.

Es bezeichne  $\mathbf{D}$  die Kreisscheibe  $\{|z| < 1\}$  und  $c$  eine komplexe Zahl vom Betrag 1;  $f(z)$  ist stets eine holomorphe Funktion von  $\mathbf{D}$  in  $\mathbf{D}$ , die im Nullpunkt verschwindet und daher die Entwicklung  $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$  besitzt.

Das Schwarzsche Lemma besagt, dass  $|f(z)| \leq |z|$  in  $\mathbf{D}$  und Gleichheit für ein  $z_0 \neq 0$  nur eintreten kann, wenn  $f(z) = cz$  ist. Durch Integration folgt daraus sofort  $|\int_{-1}^1 f(x) dx| < 1$ , aber die Schranke 1 ist nicht scharf. Nach der von P. von Siebenthal gestellten Aufgabe 901 ist  $\frac{2}{3}$  die genaue Schranke, die nur durch die Funktionen  $f(z) = cz^2$  erreicht wird. In der von R. Mortini gegebenen Lösung ist nun (implizit) die folgende Variante des Schwarzschen Lemma enthalten.

I. Es ist

$$(1) \quad |f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2 \quad \text{in } \mathbf{D},$$

und für ein  $z_0 (\neq 0)$  kann Gleichheit nur eintreten, wenn  $f(z) = cz^2$  ist.

Mit der dortigen Bezeichnungsweise ist nämlich

$$\frac{1}{2} |f(z) + f(-z)| = |w(z)| \leq |z|^2 \quad \text{und} \quad f(z) = cz^2 + v(z),$$

falls für ein  $z_0 (\neq 0)$  Gleichheit besteht. Gleich wie dort schliesst man, dass  $v(z)$  die Konstante Null sein muss. Aus (1) folgt dann durch Integration sofort die Aussage in Aufgabe 901, dass

$$|\int_{-1}^1 f(x) dx| = |\int_0^1 (f(x) + f(-x)) dx| \leq 2 \int_0^1 x^2 dx = 2/3$$

ist und Gleichheit nur eintreten kann für  $f(z) = cz^2$ .

Dies ist aber nur der erste Schritt zu einer Reihe von Varianten. Zur Formulierung einer zweiten setzen wir

$$\varepsilon = \exp \frac{2\pi i}{3}.$$

Sie lautet dann:

II. Es ist

$$|f(z) + f(\varepsilon z) + f(\varepsilon^2 z)| \leq 3|z|^3 \quad \text{in } \mathbf{D},$$

und Gleichheit kann für ein  $z_0 (\neq 0)$  nur eintreten, wenn  $f(z) = cz^3$  ist. Der Beweis ist ganz analog zu jenem von Mortini. Wir setzen

$$g(z) = \frac{1}{3} (f(z) + f(\varepsilon z) + f(\varepsilon^2 z))$$

und  $u = f - g$ . Dann ist  $g(\varepsilon z) = g(z)$  und daher

$$(2) \quad u(z) + u(\varepsilon z) + u(\varepsilon^2 z) = 0.$$

Die Funktion  $g$  bildet  $\mathbf{D}$  in sich ab und hat in 0 die Entwicklung

$$g(z) = a_3 z^3 + a_6 z^6 + \dots$$

Nach der Schlussweise beim Schwarzschen Lemma ist dann  $|g(z)| \leq |z|^3, z \in \mathbf{D}$ , und Gleichheit kann für ein  $z_0 (\neq 0)$  nur eintreten, wenn  $g(z) = cz^3$  und daher  $f(z) = cz^3 + u(z)$  ist. Es bleibt zu zeigen, dass  $u(z)$  identisch verschwindet. Wegen  $|cz^3 + u(z)| = |f(z)| < 1$  und  $|c| = 1$  folgt durch quadrieren, dass

$$|z|^6 + 2 \Re \{ cz^3 \cdot u(z) \} + |u(z)|^2 < 1$$

ist und danach auch

$$|z|^6 + 2 \Re \{ cz^3 \cdot u(\varepsilon z) \} + |u(\varepsilon z)|^2 < 1$$

und

$$|z|^6 + 2 \Re \{ cz^3 \cdot u(\varepsilon^2 z) \} + |u(\varepsilon^2 z)|^2 < 1.$$

Addition und Berücksichtigung von (2) ergibt

$$3|z|^6 + |u(z)|^2 + |u(\varepsilon z)|^2 + |u(\varepsilon^2 z)|^2 < 3,$$

also  $|u(z)|^2 < 3(1 - |z|^6)$ . Gemäss dem Maximumprinzip muss  $u$  die Konstante Null und daher  $f(z) = cz^3$  sein.

Nach diesem Beweis der Variante II ist für jedermann klar, wie man weitergehen könnte.

Albert Pfluger, Zürich

## Didaktik und Elementarmathematik

### Über ein Trapez aus merkwürdigen Punkten des Dreiecks

Ziel dieser Note ist es, auf einige bemerkenswerte Beziehungen zwischen gewissen merkwürdigen Punkten des ebenen Dreiecks hinzuweisen. Neben den vier klassischen merkwürdigen Punkten Schwerpunkt  $S$ , Umkreismittelpunkt  $M$ , Inkreismittelpunkt  $I$  und