Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 40 (1985)

Heft: 3

Artikel: Die 5 Typen der projektiven Abbildungen der Geraden auf sich und die 10 Typen der projektiven Abbildungen der Ebene auf sich

Autor: Heesch, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38831

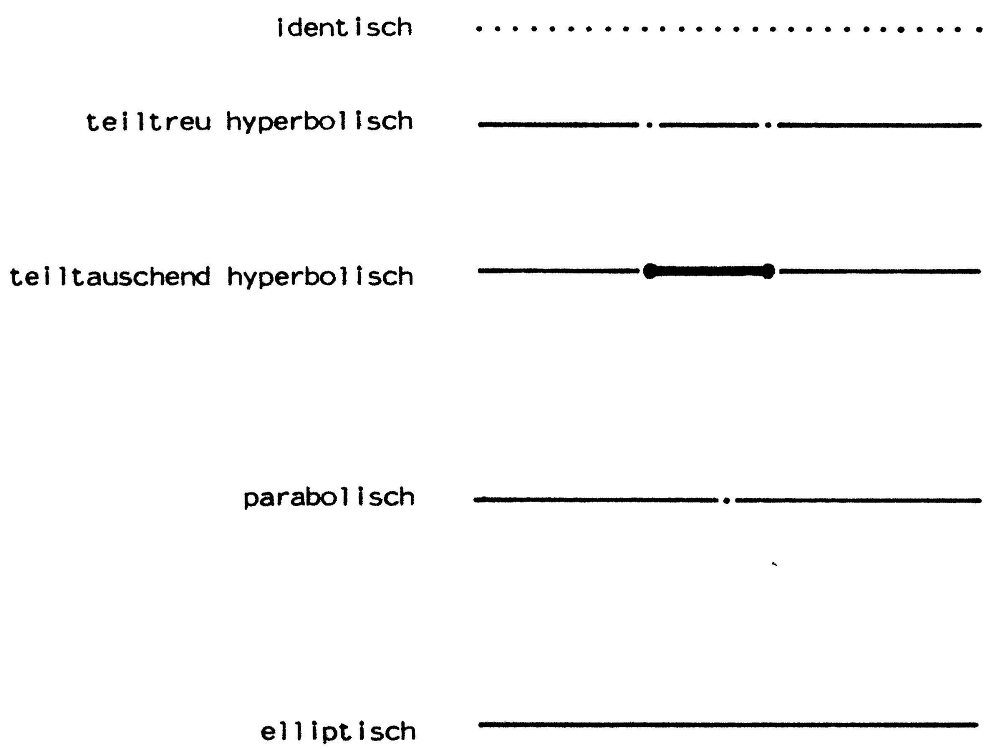
Die 5 Typen der projektiven Abbildungen der Geraden auf sich und die 10 Typen der projektiven Abbildungen der Ebene auf sich

Bekanntlich ist eine projektive Abbildung einer Geraden auf sich durch drei Punkte und deren Bilder bestimmt, eine projektive Abbildung der Ebene auf sich durch 4 Punkte in allgemeiner Lage und deren Bilder (siehe z. B. Enzyklopädie der Elementarmathematik IV, Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969, oder H. S. M. Coxeter, Projective Geometry, 1964, Waltham, Massachusetts, London, Toronto). H. S. M. Coxeter hat in seinem Buch *The Real Projective Plane,* McGraw-Hill Book Company, Inc., 1. Auflage 1949, deutsch von W. Burau, Reelle projektive Geometrie der Ebene, München 1955 – ich zitiere aus diesem Übersetzungswerk –, auf Seite 47 die Tafel der 5 Klassen der Gruppe der linearen Abbildungen der projektiven Geraden auf sich angegeben. Im folgenden ist in Tafel 1 eine Veranschaulichung dieser 5 Klassen (der linearen Abbildungen des eindimensionalen projektiven Raumes auf sich) gegeben; auf der Geraden, die dabei jedesmal einen eindimensionalen projektiven Punktraum repräsentiert, sind Fixpunkte durch das übliche Punktsymbol dargestellt. Es gibt dabei genau die 5 verschiedenen Fälle:

1. Sämtliche Punkte sind Fixpunkte.
2. Es gibt genau 2 Fixpunkte; dieser Fall spaltet in die beiden Unterfälle auf,

Tafel 1

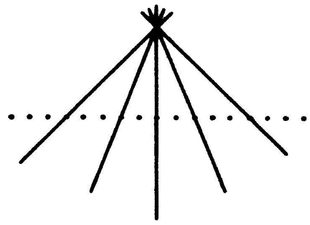
DIE 5 TYPEN DER PROJEKTIVITÄTEN AUF EINER GERADEN (COXETER)



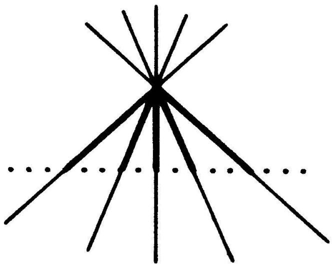
DIE 10 TYPEN EBENER KOLLINEATIONEN

Tafel 2

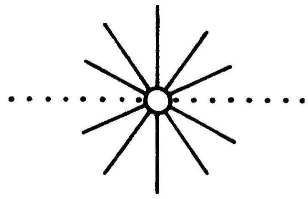
E



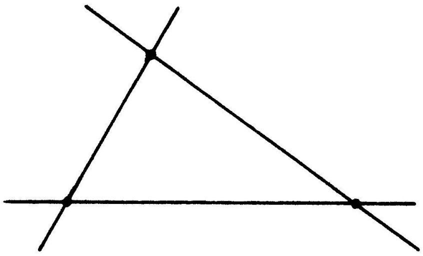
Treuhomologie



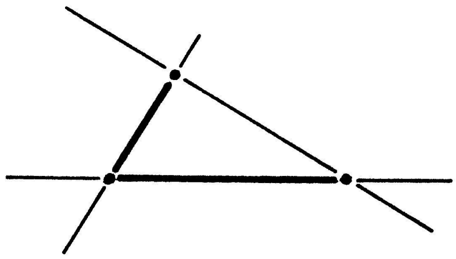
Tauschhomologie



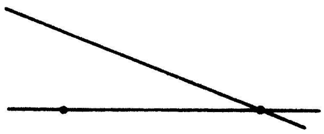
Elation



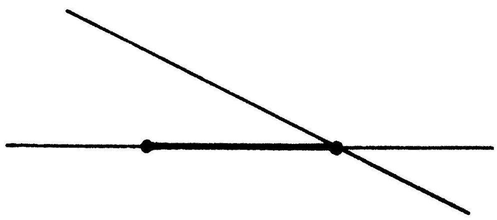
Treuterlation



Tauschterlation



Treubilation



Tauschbilation

Delation

Adlation

2a. dass die beiden durch das Fixpunktepaar definierten Teilgeraden je auf sich,
2b. aufeinander, das ist: vertauscht, abgebildet sind.
3. Es gibt genau einen Fixpunkt.
4. Es gibt keinen Fixpunkt.

Für die Herleitung einer Antwort auf die gleiche Frage für die Dimension 2, d.h., für die projektive Ebene (mit ihren 10 Typen der zweidimensionalen projektiven Abbildungen), kann daher die Methode des Durchspielens der Möglichkeiten von *Paaren* dieser 5 Fälle zur Dimensionszahl 1 gewählt werden.

Dies geschieht im folgenden: Ausgangspunkt ist die Tafel 1 unter Verwendung auch der fünf Bezeichnungen 1., 2a., 2b., 3., 4. für die fünf eindimensionalen Abbildungstypen 1. der Identität, der 2a. teiltreuen oder aber 2b. teiltauschenden hyperbolischen Projektivität mit 2 Fixpunkten oder 3. der parabolischen (mit einem Fixpunkt) oder schliesslich 4. der elliptischen, fixpunktfreien Projektivität.

Für den ersten Fall auf Tafel 2 gibt es zwei verschiedene punktweis fixe Geraden. Typ Nr. 1 der ebenen Abbildungen: (zweidimensionale) Identität E.

Ausser den sämtlichen Punkten einer Geraden (der eindimensionalen Identität) gibt es einen nicht auf ihr liegenden Fixpunkt F. Hierbei ist zu unterscheiden, ob die zwei Fixpunkte auf einer jeden Geraden des Büschels mit F als Büschelträger a) jeden der beiden durch sie definierten Geradenteile in sich (Treuhomologie) oder b) permutiert (Tauschhomologie) abbilden. Typen 2 und 3 der ebenen Abbildungen.

Ein weiterer Fall ergibt sich, wenn der Trägerpunkt des Büschels auf der punktweis fixen Geraden liegt: Typ Nr. 4, Elation.

Die Anzahl der Typen der zweidimensionalen projektiven Abbildungen mit wenigstens einer punktweis fixen Geraden ist also 4.

Im folgenden gibt es mithin nur endlich viele Fixpunkte, und, wie schon (aus der Ungeradheit der Ordnung 3 der Gleichung für die Fixpunkte ersichtlich) bemerkt, 3, 2 oder einen Fixpunkt (Tafel 2).

Bei genau 3 (selbstverständlich nichtkollinearen) Fixpunkten gibt es das Paar der Terlationen; bei der Treu-Terlation wird jeder durch 2 Fixpunkte definierte Teil einer der 3 Fixgeraden auf sich abgebildet; bei der Tauschterlation permutieren in 2 der 3 Fixgeraden die Teile.

Es gibt – wie schon erörtert – keine lineare Abbildung der projektiven Ebene auf sich mit genau zwei Fixgeraden und 0 Fixpunkten. Hingegen gibt es das Paar projektiver Abbildungsklassen mit genau 2 Fixpunkten, sowohl mit Erhalt der beiden durch die Fixpunkte definierten Teile der einen Fixgeraden wie mit dem Tausch der Teile (Treubilation bzw. Tauschbilation).

Schliesslich gibt es die linearen Abbildungen der projektiven Ebene auf sich mit genau einem Fixpunkt und genau einer Fixgeraden. Es sind die beiden Fälle zu unterscheiden: Der Fixpunkt liegt ausserhalb der Fixgeraden (Delation), oder der Fixpunkt liegt auf der Fixgeraden (Adlation).

H. Heesch, Institut für Mathematik, Universität, Hannover

 0013-6018/85/060060-03$1.50 + 0.20/0