

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 40 (1985)  
**Heft:** 4

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Kleine Mitteilungen

### Einschliessung ebener Kurven

Von einer Kurve in der euklidischen Ebene sagen wir, dass sie die Menge  $K$  einschliesst, wenn  $K$  in der konvexen Hülle der Kurve enthalten ist. Für eine geschlossene, rektifizierbare Kurve  $K$  der Länge  $L(K)$  bezeichne  $L^*(K)$  das Infimum der Längen aller rektifizierbaren Kurven (zusammenhängend, aber nicht notwendig geschlossen), die  $K$  einschliessen. Wir zeigen die Ungleichung

$$L^*(K) \leq \frac{2 + \pi}{2\pi} L(K), \quad (1)$$

in der Gleichheit genau dann gilt, wenn  $K$  ein Kreis ist. Dass für Kreise Gleichheit gilt, hat Joris [2] gezeigt.

Da bei nichtkonvexen geschlossenen Kurven der Rand der konvexen Hülle stets kleinere Länge hat, dürfen wir uns zum Beweis der Ungleichung (1) auf konvexe Kurven  $K$  beschränken. Für eine solche Kurve ist durch  $h_K(\varphi) = \text{Max}\{\langle x, e_\varphi \rangle : x \in K\}$  die Stützfunktion  $h_K$  definiert; dabei ist in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichnet das Skalarprodukt und  $e_\varphi$  den Einheitsvektor  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ . Bekanntlich gilt

$$L(K) = \int_0^{2\pi} h_K(\varphi) d\varphi. \quad (2)$$

$S(\varphi)$  sei die Stützgerade an  $K$  mit äusserem Normalenvektor  $e_\varphi$ . Für gegebenen Winkel  $\varphi$  sei  $s^\pm$  der Schnittpunkt von  $S(\varphi)$  mit  $S(\varphi \pm \pi/2)$  und  $t^\pm$  der zu  $s^\pm$  nächste Punkt auf  $K \cap S(\varphi \pm \pi/2)$ . Aus den Strecken  $s^+t^+$ ,  $s^-t^-$  und dem zwischen  $t^+$  und  $t^-$  liegenden Teil der Kurve  $K$ , der nicht die Gerade  $S(\varphi)$  berührt, setzen wir die U-förmige Kurve  $U_\varphi$  zusammen, die  $K$  einschliesst. Sie hat die Länge

$$L(U_\varphi) = 2h_K(\varphi) + \int_{\varphi + \frac{1}{2}\pi}^{\varphi + \frac{3}{2}\pi} h_K(\alpha) d\alpha, \quad (3)$$

wie man am bequemsten einsieht, wenn man (2) auf die konvexe Kurve anwendet, die sich aus der Kurve  $U_\varphi$  und ihrem Spiegelbild am Punkt  $z = (s^+ + s^-)/2$  zusammensetzt (zum Nachweis von (3) darf man etwa  $z = 0$  annehmen, da beide Seiten von (3) nicht von der Wahl des Ursprungs abhängen). Nach (3) und (2) ist  $L(U_\varphi) + L(U_{\varphi+\pi}) = 2h_K(\varphi) + 2h_K(\varphi + \pi) + L(K)$  und folglich

$$\int_0^{2\pi} L(U_\varphi) d\varphi = (2 + \pi)L(K).$$

Für passendes  $\varphi$  ist daher  $2\pi L(U_\varphi) \leq (2 + \pi)L(K)$ , woraus die Ungleichung (1) folgt.

Gilt nun Gleichheit in (1), so muss insbesondere  $L(U_\varphi)$  konstant sein. Aus (3) folgt dann durch Differenzieren (und wegen der Periodizität von  $h_K$ )

$$h'_K(\varphi) = \frac{1}{2} \left[ h_K\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) - h_K\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

für alle  $\varphi$ . Es ist bekannt (Fejes Tóth [1], S. 37–38), dass hieraus

$$h_K(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi$$

mit Konstanten  $a_0, a_1, b_1$  folgt;  $K$  ist also ein Kreis.

R. Schneider und J. A. Wieacker, Freiburg i. Br.

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 L. Fejes Tóth: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953.
- 2 H. Joris: Le chasseur perdu dans la forêt (Un problème de géométrie plane). El. Math. 35, 1–14 (1980).

© 1985 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/85/060098-02\$1.50 + 0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 910.** Die Polynomfolge  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sei rekursiv definiert durch

$$p_1(x) = x, \quad p_{n+1}(x) = x(1-x)p'_n(x); \quad n \in \mathbf{N}.$$

Man ermittle für jedes  $n \in \mathbf{N}$  die Menge der rationalen Nullstellen von  $p_n$ .

H. Müller, Hamburg, BRD

**Solution:** Let  $N_n$  be the set of all rational zeros of  $p_n$ . Then clearly  $N_1 = \{0\}$ ,  $N_n \supseteq \{0,1\}$  for all  $n > 1$ . By induction on  $n$  one easily shows that

- (1)  $p_n$  is an integer polynomial of degree  $n$  with  $n$  simple real zeros in the interval  $[0,1]$ .
- (2)  $p_n(1-x) = (-1)^n p_n(x)$  for  $n > 1$ .
- (3)  $p_n(0) = 0$  and  $p'_n(0) = 1$ .

For the proof of (1) one uses the mean-value theorem. It follows from (2) that  $\frac{1}{2} \in N_n$  for all odd  $n > 1$ . Consequently  $\frac{1}{2} \notin N_{n+1}$  if  $n$  is odd, since all zeros of  $p_n$  are simple as mentioned in (1). Let  $q_n$  be defined by  $q_n(x) = x^n p_n(1/x)$ . Then  $q_n$  is a monic integer polynomial of