Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 40 (1985)
Heft: 6

Rubrik: Aufgaben

Aufgaben

Aufgabe 914. Man bestimme für beliebiges $n \in \mathbf{N}$ die Mächtigkeit der Menge

$$A_n := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{Z}^n | 0 \leqslant x_i \leqslant i \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = n \right\}.$$

W. Janous, Innsbruck, A

Lösung: Die Referenzmenge für den Summanden x_i lautet $R_i = \{0, 1, 2, \ldots, i\}$. Für die Menge F der möglichen Partitionen von n gilt dann

$$F \sim R_1 \times R_2 \times R_3 \times \ldots \times R_n.$$

R_i ist eine Figurenmenge mit der abzählenden Potenzreihe

$$f_i(x) = \sum_{r \in R_i} x^r = 1 + x + x^2 + \ldots + x^i = \frac{1 - x^{i+1}}{1 - x}.$$

Damit erhält man für die abzählende Potenzreihe von F

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x) = \prod_{i=1}^{n} (1 - x^{i+1})/(1 - x)^n.$$

Die Mächtigkeit von A_n ist der Koeffizient von x^n.
Mit dem Eulerschen Pentagonalzahlensatz in der Sprache der formalen Potenzreihen

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x^{k(3k-1)/2} + x^{k(3k+1)/2})$$

und der Umformung

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (1 - x^i)/(1 - x)^{n+1} = \prod_{i=1}^{n} (1 - x^i) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k$$

erhält man für den gesuchten Koeffizienten

$$|A_n| = \binom{2n}{n} + \sum_{k \geqslant 1} (-1)^k \left[\binom{2n - k(3k-1)/2}{n} + \binom{2n - k(3k+1)/2}{n} \right]$$

Dabei sind von der Summe nur die Terme zu berücksichtigen, für die $2n \geqslant k(3k-1)$ bzw. $2n \geqslant k(3k+1)$ wird.

LITERATURVERZEICHNIS

1 M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik II, S. 101 bzw. 119, Stuttgart 1976.

M. Vowe, Therwil

Weitere Lösungen sandten J.C. Binz (Bolligen), P. Bundschuh (Köln, BRD), Kee-wai Lau (Hongkong), O.P. Lossers (Eindhoven, NL, 2 Lösungen), Chr. A. Meyer (Ittingen). Eine Lösung war fehlerhaft.

Aufgabe 915. Für $n \in \mathbf{Z}$ bezeichne $f_n: \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ eine multiplikative arithmetische Funktion mit folgender Eigenschaft: Für alle Primzahlen p und alle Exponenten $k \in \mathbf{N}$ gilt

$$f_n(p^k) = \binom{n}{k}.$$

Man bestimme die Konvergenzabszisse sowie die Summe der Dirichletschen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_n(k) k^{-s}.$$

V.D. Mascioni, Origlio

Lösung: Schreibt man jedes $k \in \mathbf{N}$ eindeutig in der Form

$$\prod_{p|k} p^{e_p(k)}, \quad \text{so ist} \quad f_n(k) = \prod_{p|k} f_n(p^{e_p(k)}) \quad \text{und daher}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_n(k) k^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{p|k} \binom{n}{e_p(k)} p^{-se_p(k)} = \prod_p \sum_{e=0}^{\infty} \binom{n}{e} p^{-se} = \prod_p (1+p^{-s})^n = (\xi(s)/\xi(2s))^n$$

bei beliebigem $n \in \mathbf{Z}$. Die Konvergenzabszisse der vorgegebenen Dirichlet-Reihe ist 1 für $n \neq 0$ und $-\infty$ für $n = 0$.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten J.C. Binz (Bolligen), W. Janous (Innsbruck, A), O.P. Lossers (Eindhoven, NL).

Aufgabe 916. Es bezeichnen a, b, c die Seiten, r_a, r_b, r_c die Ankreisradien, $2s$ den Umfang und r den Inkreisradius eines ebenen Dreiecks. Ferner sei

$$S := \frac{r_b + r_c}{b + c} + \frac{r_c + r_a}{c + a} + \frac{r_a + r_b}{a + b}.$$

Man schätze S nach unten sowie rS/s nach oben bestmöglich ab.

D.M. Milošević, Pranjani, YU

Lösung: Wir zeigen, dass

$$S \geqslant 3\sqrt{3}/2 \quad \text{und} \quad rS/s \leqslant 1/2$$

mit Gleichheit genau für das gleichseitige Dreieck gilt.

Beweis:
Wegen

$$(r_a + r_b)(r_a + r_c)(r_b + r_c) = 4Rs^2$$

und

$$3\sqrt{3}R \geqslant 2s$$

(Ungleichung 5.3 in [1]) bzw. der unmittelbar daraus folgenden Ungleichung

$$4Rs^2 \geqslant 8s^3/(3\sqrt{3}) = (2s/\sqrt{3})^3$$

ergibt sich mit dem arithmetischen-geometrischen und -harmonischen Mittel

$$S \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{4Rs^2}{(a+b)(a+c)(b+c)}} \geqslant 3\frac{2s}{\sqrt{3}}\frac{3}{2(a+b+c)} = 3\sqrt{3}/2$$

und damit der erste Teil der Behauptung.
Wegen $(a+b)^2 \geqslant 4ab$ erhält man

$$1/(a+b)^2 + 1/(a+c)^2 + 1/(b+c)^2 \leqslant \frac{a+b+c}{4abc} = \frac{1}{8rR}.$$

Da $(r_a + r_b)^2 + (r_a + r_c)^2 + (r_b + r_c)^2 = 2((r+4R)^2 - s^2)$ ist, ergibt sich mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$S \leqslant \sqrt{((r+4R)^2 - s^2)/(4Rr)}.$$

Damit bleibt für den zweiten Teil der Behauptung zu zeigen:

$$(r+4R)^2 - s^2 \leqslant s^2 R/r.$$

Nach Umformen in $s^2(1 + R/r) - (r+4R)^2 \geqslant 0$ und Heranziehen der Ungleichung 5.8 in [1] ($s^2 \geqslant r(16R - 5r)$) erscheint die sicher richtige Ungleichung

$$3r(R - 2r) \geqslant 0.$$

Bei allen Abschätzungen gilt Gleichheit genau für $a = b = c$.

LITERATURVERZEICHNIS

1 O. Bottema et al.: Geometric Inequalities. Groningen 1969.

M. Vowe, Therwil

Weitere Lösungen sandten S. Arslanagic (Trebinje, YU), P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Hj. Stocker (Wädenswil).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Juni 1986* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 932. Es sei

$$a_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} t^{2n-3k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Man untersuche das Konvergenz- bzw. Divergenzverhalten der Zahlenfolge (a_n) in Abhängigkeit vom reellen Parameter t.

J.C. Binz, Bolligen

Aufgabe 933. m und n seien nichtnegative ganze Zahlen. Die Funktion $f: [0,1] \to \mathbf{R}$ sei n-mal stetig differenzierbar, und es gelte

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, \dots, n-1 \tag{1}$$

sowie

$$\int_0^1 x^j f(x)\, dx = 0 \quad \text{für} \quad j = 1, \dots m. \tag{2}$$

Man zeige, dass

$$\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)^2 \leqslant (2n+1)\left[\frac{n!\,m!}{(2n+m+1)!}\right]^2 \cdot \int_0^1 [f^{(n)}(x)]^2\, dx.$$

Wann genau gilt Gleichheit?

H.-J. Seiffert, Berlin, BRD

Aufgabe 934. Man beweise für natürliche Zahlen n die Ungleichung

$$2 \arctan \frac{1}{2n-1} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

P. Ivady, Budapest, Ungarn