Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 41 (1986)

Heft: 1

Artikel: Zum Satz von Holditch in der euklidischen Ebene

Autor: Pottmann, Helmut

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39464

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. | Band 41 | Nr. 1 | Seiten 1–24 | Basel, 10. Januar 1986

Zum Satz von Holditch in der euklidischen Ebene

Der klassische Satz von H. Holditch [3] hat in letzter Zeit wiederholt das Interesse der Geometer auf sich gezogen und wurde dabei auf verschiedenste Arten verallgemeinert und in andere Geometrien übertragen (vgl. dazu die Literaturzitate in [2] und [5]). Die folgenden Zeilen sind einer Erweiterung des Holditch-Satzes in der euklidischen Ebene gewidmet, wobei vor allem die Flächeninhalte kinematisch erzeugter unbeschränkter Bereiche zur Diskussion stehen (vgl. [5] und [6]).

1. Auf die durch $(O;x,y)$ kartesisch koordinatisierte euklidische Ebene Σ üben wir vermöge

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0(t) + x\cos\varphi(t) - y\sin\varphi(t),\\ y_0 &= b_0(t) + x\sin\varphi(t) + y\cos\varphi(t), \quad t\in I\subset\mathbf{R}, \quad a_0, b_0, \varphi\in C^1(I) \end{aligned} \tag{1}$$

eine stetig differenzierbare Schar von gleichsinnig kongruenten Abbildungen aus und erhalten so einen *ebenen euklidischen* C^1*-Zwanglauf* Σ/Σ_0 der bewegten *Gangebene* Σ gegenüber der ruhend gedachten *Rastebene* Σ_0, welche auf das kartesische Koordinatensystem $(O_0;x_0,y_0)$ bezogen ist und für jedes $t\in I$ die Neulage Σ' von Σ trägt (siehe [4,7]). Der Zwanglauf heisst *geschlossen* mit der minimalen Periode T und der *Drehzahl* $\nu\in\mathbf{Z}$, sofern ein kleinstes reelles $T>0$ mit

$$a_0(t+T) = a_0(t), \quad b_0(t+T) = b_0(t), \quad \varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi\nu \tag{2}$$

existiert. Durch (1) und (2) wird mit konstanten Werten für x und y die im Sinne wachsender Parameter orientierte, geschlossene *Bahnkurve* des Punktes $X(x,y)\in\Sigma$ erfasst. Bei einer vollen Periode eines geschlossenen Zwanglaufs ($t\in[0,T]$) können einzelne Punkte ihre Bahnen auch mehrmals durchlaufen. Wir bezeichnen nun (im 1. Abschnitt) die mit den jeweiligen Durchlaufzahlen multiplizierten orientierten Flächeninhalte der Bahnkurven als *Bahnflächeninhalte.* Dann besagt eine bekannte Verallgemeinerung des Holditchschen Satzes (vgl. [1, S. 142] oder [2]): Durchlaufen zwei Punkte $A, B\in\Sigma$ mit den Koordinaten $(0,0)$ bzw. $(a+b,0)$ bei einem geschlossenen ebenen euklidischen C^1-Zwanglauf Σ/Σ_0 mit der Drehzahl ν die Bahnen k_A bzw. $k_B\subset\Sigma_0$ mit den Bahnflächeninhalten $F(A)$ bzw. $F(B)$, so beschreibt ein mit A und B kollinearer Punkt $X(a,0)\in\Sigma$ eine Bahnkurve k vom Bahnflächeninhalt

$$F(X) = [aF(B) + bF(A)]/(a+b) - \nu\pi ab. \tag{3}$$

Hieraus schliesst man auf den

Satz 1. *Durchlaufen die Punkte A_i und B_i der beiden Geraden $g_i (i = 1, 2)$ im Rahmen der geschlossenen ebenen euklidischen C^1-Zwangläufe Z_i mit den Drehzahlen v_i mit gleicher Orientierung und derselben Durchlaufzahl die Kurven k_A bzw. k_B, so erzeugen die Punkte $X_i \in g_i$ (mit $\overline{A_i X_i} = \lambda_i a, \overline{X_i B_i} = \lambda_i b$)*[1]*) Bahnkurven k_i, für welche die Differenz $F = F_1 - F_2$ ihrer Bahnflächeninhalte F_i unabhängig von k_A und k_B ist. Es gilt nämlich:*

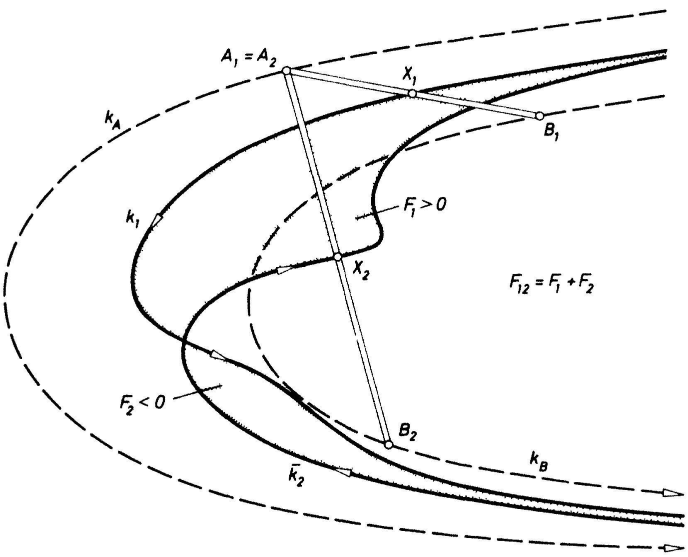
$$F = (v_2 \lambda_2^2 - v_1 \lambda_1^2) \pi a b. \tag{4}$$

Dabei bedeutet die Formulierung «mit gleicher Orientierung», dass die Punkte A_i (bzw. B_i) – abgesehen von den nicht notwendig gleichen Rückläufen – der Kurve k_A (bzw. k_B) unter Z_1 und Z_2 dieselbe Orientierung aufprägen. Dies ist für die wesentliche Forderung der Übereinstimmung der Bahnflächeninhalte ($F(A_1) = F(A_2), F(B_1) = F(B_2)$) notwendig. Satz 1 enthält mit $k_A = k_B, v_2 = 1$ und $\lambda_1 = 0 (\Rightarrow k_1 = k_A)$ den klassischen Holditch-Satz.

2. Wir wählen nun als Führungskurven k_A und k_B *Randkurven unbeschränkter Bereiche* der Rastebene. Sie seien durch globale $C^1(\mathbf{R})$-Wege c_A, c_B mit

$$c_A, c_B : u \in \mathbf{R} \mapsto P_A(u) (P_B(u)) \in \mathbf{R}^2, \quad k_A = c_A(\mathbf{R}), \quad k_B = c_B(\mathbf{R}) \tag{5}$$

darstellbar, wobei die Punktmengen $c_A(\mathbf{R})$ und $c_B(\mathbf{R})$ für $u \to +\infty$ und $u \to -\infty$ nicht beschränkt sein sollen. Weiters mögen in den bei projektiver Erweiterung von $\mathbf{R}^2 (= \Sigma_0)$ existierenden Fernpunkten dieser Kurven die Grenzlagen der Tangenten existieren. Nun bestimmen die analog zu Satz 1 erklärten Kurven k_1 und k_2 einen *Bahnflächeninhalt* F_{12}: Den Kurven k_i wird unter Z_i eine Orientierung aufgeprägt. Wird jetzt k_2 zu $\bar{k}_2$ umorientiert, so ist F_{12} die Summe der orientierten Inhalte der in den Schnittpunkten von k_1 und k_2 zusammenhängenden, von k_1 und $\bar{k}_2$ berandeten Bereiche (Fig. 1). Eine exakte Definition



Figur 1. Zur Definition des Bahnflächeninhaltes F_{12}.

1) Die Abstände sind nach Auszeichnung einer positiven Richtung auf g_i mit Vorzeichen zu versehen.

von F_{12} findet man in [5] und auch im Beweis des folgenden Ergebnisses, für dessen Formulierung sich folgende Auffassung als zweckmässig erweist: Anstelle der Betrachtung zweier Zwangläufe gemäss Satz 1 verwenden wir einen als *Zweischlag* bezeichneten, auf der Rastebene Σ_0 liegenden Mechanismus, der aus den beiden starren Geraden $g_i = A_i B_i$ besteht, welche im Punkt $A := A_1 = A_2$ durch ein Drehgelenk verbunden sind (Fig. 1). Durch Führung der drei Punkte A, B_1, B_2 längs gegebener Bahnen der Rastebene Σ_0 erhalten wir ein «Getriebe» (i. a. vom Freiheitsgrad 1) mit zwei (durch die g_i repräsentierten) bewegten Systemen Σ_i und dem ruhenden System Σ_0. Nun gilt:

Satz 2. *Bewegen wir einen Zweischlag $B_1 A B_2$ so, dass sein Gelenk A und die auf den Schenkeln $g_i = AB_i$ $(i = 1,2)$ liegenden Punkte B_i die gesamten, durch (5) darstellbaren Randkurven k_A bzw. k_B unbeschränkter Bereiche durchlaufen*[2]*, dann erzeugen die Punkte $X_i \in g_i$ $(\overline{AX_i} = \lambda_i a$, $\overline{X_i B_i} = \lambda_i b$ mit $a + b, \lambda_i \in \mathbf{R}^+)$ Bahnen k_i, welche den Bahnflächeninhalt*

$$F_{12} = [\lambda_1 \lambda_2 (\sin\gamma_2 - \sin\gamma_1) + \delta_2 \lambda_2^2 - \delta_1 \lambda_1^2]\, ab/2 \tag{6}$$

bestimmen. Hierin bezeichnen wir mit $\delta_i \in \mathbf{R}$ den Gesamtdrehwinkel von g_i und mit γ_1, γ_2 die zu den Fernlagen $t = \pm\infty$ gehörigen Grenzwerte

$$\gamma_1 := \lim_{t \to +\infty} \gamma(t), \quad \gamma_2 := \lim_{t \to -\infty} \gamma(t) \tag{7}$$

des Zweischlagwinkels $\gamma(t) = \sphericalangle B_1^t A^t B_2^t$[3]*.*

Beweis: I. Sei $Z = \Sigma/\Sigma_0$ ein durch (1) beschriebener, nicht notwendig geschlossener ebener euklidischer C^1-Zwanglauf, $X(x,y)$ ein beliebiger Punkt der Gangebene Σ sowie O_0 der Ursprung $(0,0)$ der Rastebene Σ_0. Dann überstreichen die Strecken $\overline{O_0 X^t}$ $(t \in I = [r,s])$ eine sogenannte «Sektorenfläche», deren orientierter Inhalt $\tilde{F}(X)$ mittels

$$\tilde{F}(X) = \frac{1}{2} \int_r^s (x_0 \dot{y}_0 - \dot{x}_0 y_0)\, dt \quad \text{bei} \quad \dot{x}_0 = dx_0/dt, \quad \dot{y}_0 = dy_0/dt$$

berechnet werden kann. Hierbei sind die C^1-Funktionen $x_0(t)$ und $y_0(t)$ der Zwanglaufdarstellung (1) zu entnehmen. Dies liefert mit $\tilde{F}(O)$ als Sektorenflächeninhalt des Ursprungs $O(0,0)$ der Gangebene Σ und geeigneten reellen Konstanten C, D die in [1, S. 117] angeführte Formel

$$\tilde{F}(X) = \tilde{F}(O) + \frac{\tilde{\delta}}{2}(x^2 + y^2 + Cx + Dy),$$

wobei

$$\tilde{\delta} = \int_r^s \dot{\varphi}(t)\, dt \quad \text{mit} \quad \dot{\varphi} = d\varphi/dt$$

2) Dies ist nur bei spezieller gegenseitiger Lage der Kurven k_A und k_B möglich und setzt jedenfalls das Zusammenfallen ihrer Fernpunkte voraus.

3) Die durch die Bewegung der g_i definierten Zwangläufe Z_i seien auf den gemeinsamen Parameter t bezogen, und die Durchlaufung erfolge im Sinne wachsender Parameter von der Fernlage $t = -\infty$ bis zur Fernlage $t = +\infty$. X^t bezeichne die zum Parameterwert t gehörige Lage des Punktes X in der Rastebene Σ_0.

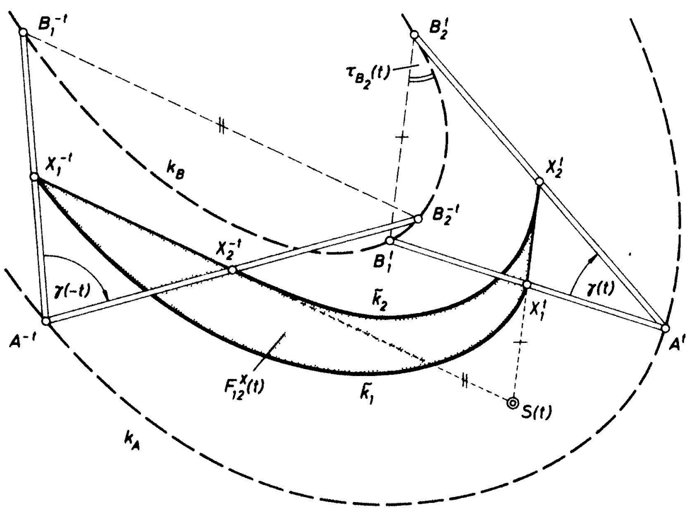
den Gesamtdrehwinkel von Z bezeichnet. Für die Sektorenflächeninhalte von drei kollinearen Punkten $A\,(0,0), B\,(a+b,0), X\,(a,0) \in \Sigma$ besteht demnach der Holditch-Satz

$$\tilde{F}(X) = [a\tilde{F}(B) + b\tilde{F}(A)]/(a+b) - ab\tilde{\delta}/2. \tag{8}$$

Wegen der freien Wahl des Rastkoordinatenursprungs O_0 bleibt (8) auch dann gültig, wenn ein anderer Punkt S der Rastebene als Bezugspunkt für die Sektorenflächen dient. Für einen geschlossenen Zwanglauf $Z\,(2)$ ist $\tilde{\delta} = 2\pi\nu$, womit auch die eingangs verwendete Formel (3) bewiesen ist.

II. Nach diesen Vorbereitungen soll nun unser Satz 2 bewiesen werden: Wir schränken die durch die g_i bestimmten Zwangläufe Z_i auf das Parameterintervall $[-t,t]$ $(t \in \mathbf{R}^+)$ ein. Die entstehenden i. a. nichtgeschlossenen Zwangläufe $\tilde{Z}_i(t)$ mögen die Gesamtdrehwinkel $\tilde{\delta}_i(t)$ besitzen. Aus dem bei geeigneter Parametrisierung der Z_i – abgesehen von endlich vielen Ausnahmestellen t_k – existierenden Schnittpunkt $S\,(t)$ der Geraden $X_1{}^tX_2{}^t$ und $X_1{}^{-t}X_2{}^{-t}$ werden die unter $\tilde{Z}_i$ erzeugten Bahnkurvenstücke durch Sektorenflächen projiziert, für deren orientierte Inhalte nach (8) für $i = 1, 2$ gilt:

$$\tilde{F}(X_i) = [a\tilde{F}(B_i) + b\tilde{F}(A)]/(a+b) - \lambda_i^2 ab\tilde{\delta}_i(t)/2. \tag{9}$$



Figur 2

Die Bahnkurvenstücke $\tilde{k}_1$ und $\tilde{k}_2$ der Punkte X_1 und X_2 werden nun durch die Strecken $X_1{}^tX_2{}^t$ und $X_2{}^{-t}X_1{}^{-t}$ zu einer geschlossenen Kurve ergänzt, die bei Durchlaufung in der Reihenfolge $X_1{}^tX_2{}^tX_2{}^{-t}X_1{}^{-t}X_1{}^t$ den orientierten Inhalt

$$F_{12}^X = \tilde{F}(X_1) - \tilde{F}(X_2)$$

besitzt (Fig. 2); analog definieren wir den Inhalt $F_{12}^B(t)$. Bezeichnen wir weiters mit Δ_i die orientierten Dreiecksflächeninhalte

$$\Delta_1(t) := F(\Delta SB_1{}^tB_2{}^t), \quad \Delta_2(t) := F(\Delta SB_1{}^{-t}B_2{}^{-t}),$$

so folgern wir über

$$F_{12}^{B}(t) = \tilde{F}(B_1) - \tilde{F}(B_2) + \Delta_1(t) - \Delta_2(t)$$

aus (9) die Beziehung

$$F_{12}^{X}(t) = \frac{a}{a+b}\,[F_{12}^{B}(t) + \Delta_2(t) - \Delta_1(t)] + [\tilde{\delta}_2(t)\lambda_2^2 - \tilde{\delta}_1(t)\lambda_1^2]\,ab/2. \tag{10}$$

Für die Differenz der Dreiecksflächen Δ_t finden wir

$$\frac{a}{a+b}\,[\Delta_2(t) - \Delta_1(t)] = \lambda_1\lambda_2 ab\,[\sin\gamma(-t) - \sin\gamma(t)]/2. \tag{11}$$

Mit $\tau_{B_i}(t) \in [0, \pi]$ als Winkel zwischen k_B und der Strecke $B_1'B_2'$ in B_i' haben wir für $F_{12}^{B}(t)$ folgende Abschätzung:

$$|F_{12}^{B}(t)| \leqq (\lambda_1 + \lambda_2)^2 (a+b)^2 [\sin\tau_{B_1}(t) + \sin\tau_{B_2}(t) + \sin\tau_{B_1}(-t) + \sin\tau_{B_2}(-t)]$$
$$\forall t > t_0 \in \mathbf{R}^+.$$

Also strebt $F_{12}^{B}(t)$ für $t \to +\infty$ wegen

$$\lim_{t\to+\infty} \tau_{B_i}(t) = \lim_{t\to+\infty} \tau_{B_i}(-t) = 0$$

gegen Null. Damit geht schliesslich (10) beim Grenzübergang $t \to +\infty$ unter Beachtung von (7), (11) und

$$\lim_{t\to+\infty} F_{12}^{X}(t) =: F_{12}, \quad \lim_{t\to+\infty} \tilde{\delta}_i(t) = \delta_i$$

in die Behauptung (6) über. □

Unsere Beweisführung zeigt, dass $F_{12}(= -F_{21})$ parameterinvariant ist, jedoch von der durch die Z_i vermittelten Orientierung der Kurven k_A, k_B abhängt: Lässt man nämlich entgegen unserer bisherigen Annahme die Bewegung von der (ursprünglichen) Fernlage $+\infty$ nach $-\infty$ ablaufen, so vertauschen γ_1 und γ_2 ihre Bedeutung und die Gesamtdrehwinkel δ_i wechseln ihr Vorzeichen. Dies hat – wie es nach unserer Definition sein muss – gemäss (6) einen Vorzeichenwechsel von F_{12} zur Folge. Weiters erkennen wir, dass sämtliche der in F_{12} aufsummierten Inhalte existieren (z. B. F_1 und F_2 in Fig. 1) und nicht etwa ein Grenzwert vom Typ «$\infty - \infty$» vorliegt.

Selbstverständlich stehen die Winkel γ_i und δ_i durch die Abhängigkeit

$$\gamma_1 + \delta_1 - \delta_2 \equiv \gamma_2 (\mathrm{mod}\, 2\pi)$$

in Beziehung.

In Satz 2 liegt mit $k_A = k_B$ und $\lambda_1 = 0$ die in [5] studierte Erweiterung des Holditch-Satzes für Führungskurven, die einen unbeschränkten konvexen Bereich der Rastebene beranden. In diesem Fall erweist sich k_2 als einfache Kurve und δ_2 fällt mit dem Tangentendrehwinkel von k_A zusammen.

Helmut Pottmann, TU Wien

LITERATURVERZEICHNIS

1 W. Blaschke und H. R. Müller: Ebene Kinematik. Oldenbourg, München 1956.
2 L. Hering: Sätze vom Holditch-Typ für ebene Kurven. El. Math. *38*, 39–49 (1983).
3 H. Holditch: Geometrical Theorem. Q. J. Pure Appl. Math. *2* (1858).
4 H. R. Müller: Kinematik. Sammlg. Göschen (Bd. 584/584a), Berlin 1963.
5 H. Pottmann: Holditch-Sicheln. Arch. Math. *44*, 373–378 (1985).
6 H. Pottmann: Ein isotropes Analogon zum Satz von Holditch. J. of Geometry (im Druck).
7 W. Wunderlich: Ebene Kinematik. Bibl. Inst. HTB (Bd. 447/447a), Mannheim/Wien/Zürich 1970.

 0013-6018/86/060001-06$1.50 + 0.20/0

The Farey series of polynomials over a finite field

Introduction

The ordinary Farey series of order n, $F_n = \{h/k \mid 0 \leq h \leq k \leq n, (h,k) = 1\}$ has a number of interesting intrinsic properties as well as having applications to such diverse areas as approximating irrational numbers, solving the Diophantine equation

$$a/b = 1/x_1 + \cdots + 1/x_k$$

(Egyptian fraction problem), and the Hardy-Littlewood method of analytic number theory.
If p is a prime, let $GF(p^r)$ be the finite field with p^r elements, and $GF[p^r, x]$ the ring of polynomials over this field. The Farey series $\mathfrak{F}_n$ is defined as:

$$\mathfrak{F}_n = \{P/Q \mid P, Q \in GF[p^r, x], \quad \deg P < \deg Q \leq n, \quad (P,Q) = 1, \quad Q \text{ monic}\}.$$

We let $GF(p^r, x)$ denote the field of rational functions over $GF(p^r)$; $v(P/Q) = \deg Q - \deg P$ the usual degree valuation on $GF(p^r, x)$; $GF\{p^r, x\}$ the completion of $GF(p^r, x)$ with respect to v, so

$$GF\{p^r, x\} = \left\{\alpha = \sum_{j=t}^{\infty} a_j x^{-j} \mid a_j \in GF(p^r)\right\}$$

where $v(\alpha) = t$ and $|\alpha| = (p^r)^{-v(\alpha)} = p^{-rt}$. (The degree of the zero polynomial is taken to be $-\infty$.) Also, the distance between α und β is given by $|\alpha - \beta|$, which is easily seen to be an ultrametric on $GF\{p^r, x\}$. The set $\mathfrak{I} = \{\alpha \mid v(\alpha) > 0\}$ consists of all elements of the form