Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 41 (1986)
Heft: 4

Artikel: Elementargeometrische Integrationen von Pascal
Autor: Loeffel, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39471

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Band 41 Nr. 4 Seiten 83–106 Basel, 10. Juli 1986

Elementargeometrische Integrationen von Pascal

Einleitung

Um die Mitte des 17. Jahrhunderts haben sich verschiedene Mathematiker fast gleichzeitig mit Flächen- und Körperberechnungen beschäftigt und so als Wegbereiter der von Leibniz und Newton geschaffenen Infinitesimalrechnung gewirkt.
Die verwendeten Methoden basierten einerseits auf einer Fortführung der *Exhaustionsmethode* von Archimedes und anderseits auf einer mehr oder weniger modifizierten *Indivisiblen-Geometrie* nach B. Cavalieri (1598–1647), einem Schüler von Galilei.

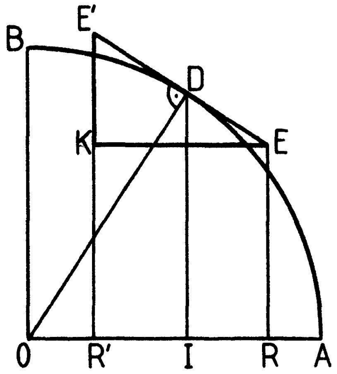
Pascal als Wegbereiter von Leibniz

Die Pionierleistungen von Blaise Pascal (1623–1662) in der projektiven Geometrie (Pascalsche Gerade für Kegelschnitte), Numerik (Rechenmaschine), Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik (Pascalsches Dreieck) sind allgemein bekannt.
Etwas in den Hintergrund gedrängt sind seine Arbeiten über Flächen- und Körperberechnungen, die den Weg zur Infinitesimalrechnung Leibnizscher Prägung geebnet haben.
Unter den zahlreichen Arbeiten wenden wir uns jener über den Viertelskreis zu, die wissenschaftshistorisch bedeutsam und didaktisch von Interesse ist.

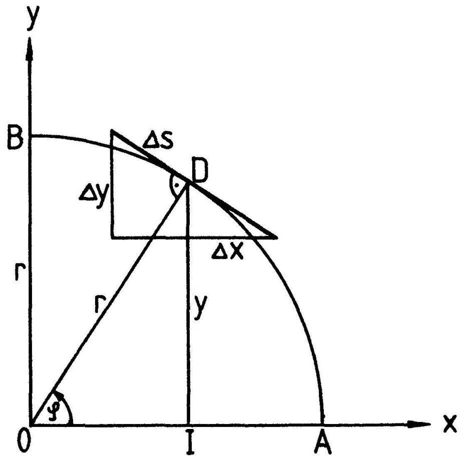
Die Abhandlung über den Viertelskreis
(Traité des sinus du quart de cercle, [1], S. 275ff.)

Die im Jahre 1658 veröffentlichte Abhandlung betrifft eine spezielle Summation oder Integration über einen Bogen im Viertelskreis BDA (siehe Fig. 1).
Hierbei spielt das nach Leibniz so benannte *charakteristische Dreieck* EKE' eine wichtige Rolle. EE' oder Δs wird dabei als infinitesimales Tangentenstück interpretiert. Die beiden Katheten EK und $E'K$ bezeichnen wir heutzutage mit Δx bzw. Δy (siehe Fig. 2).
Leibniz ist – nach seinen eigenen Aussagen – beim Studium der obgenannten Arbeit ein Licht aufgegangen, das der Autor (Pascal) nicht gesehen habe, «une lumière que l'auteur n'avait point vue»[1]).

1) Zitiert aus einem Brief, den Leibniz im Dezember 1694 an Marquis de l'Hospital richtete.



Figur 1



Figur 2

Vorbereitend vermerkt Pascal das folgende

Lemma. *Aufgrund der Ähnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke ODI und EE'K folgt (Fig. 1):*

$$DI : OD = EK : EE'$$

oder

$$y : r = \Delta x : \Delta s \qquad (Fig. 2)$$

d.f.

$$y \cdot \Delta s = r \cdot \Delta x. \tag{1}$$

Wir werden nun den ersten Satz der Abhandlung über den Viertelskreis im originalen Wortlaut zitieren, dann im Sinne von Pascal beweisen und das Resultat schliesslich in der Sprache der Integralrechnung formulieren.

Satz 1 (Fig. 3). *La somme des sinus*[2] *d'un arc quelconque est égale à la portion de la base comprise entre les sinus extrêmes multipliée par le rayon.*

Oder: *Die Summe der Sinus eines beliebigen (Kreis-)Bogens $\overset{\frown}{BC}$ ist gleich dem Abschnitt auf der Basis (Radius OA), der zwischen den extremen Sinus liegt, multipliziert mit dem Radius.*

Diese rein verbale Ausdrucksweise vermeidet jegliche Art von Symbolen bzw. Formalismus, obschon er um 1650 durch Vieta (1540–1603) und Descartes (1596-1650) schon teilweise entwickelt war.
Dieser Umstand macht nicht nur die Pascalschen Abhandlungen sehr schwer lesbar, sondern verwehrt dem Autor den entscheidenden Durchbruch zu einem universellen Infinitesimalkalkül. Dieser krönende Abschluss blieb Leibniz vorenthalten.

2) Pascal versteht unter «Sinus» die Ordinate *DI* oder *y* und nicht das Verhältnis *y* : *r*.

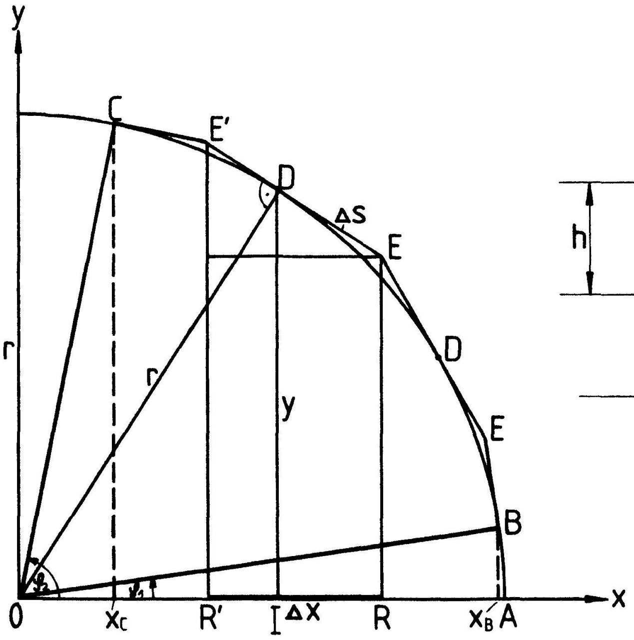
Bevor wir den Beweis des Satzes durchführen, sind noch zwei Präzisierungen notwendig, die beide von Pascal stammen:
a) Im Sinne der modifizierten Indivisiblen-Sprache ist unter «Summe der Sinus» ($\sum DI$) die Summe von Produkten aus dem Sinus und einem infinitesimalen Bogenelement $\overset{\frown}{DD}$ zu verstehen, also

$$\text{«Summe der Sinus»} = \sum DI \cdot \overset{\frown}{DD}.$$

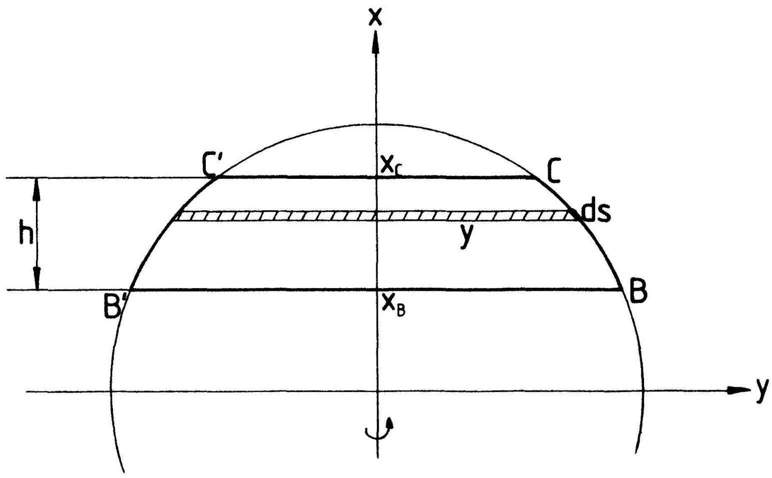
b) Im Falle unendlich vieler Summanden kann man $\overset{\frown}{DD}$ durch das infinitesimale Tangentenstück EE' ersetzen, d.h.

$$\sum DI \cdot \overset{\frown}{DD} = \sum DI \cdot EE' = \sum y \cdot \Delta s.$$

Beweis (siehe Fig. 3): Die Durchführung erfolgt nach Pascal, aber des bessern Verständnisses wegen zum Teil unter Verwendung der heute gebräuchlichen Symbole.



Figur 3



Figur 4

Der Kreisbogen $\overset{\frown}{BC}$ (B und C sind zwei beliebige, aber feste Punkte auf dem Viertelskreis) wird von einem Polygon mit sehr vielen infinitesimalen Seiten EE' umhüllt, die jeweils im Punkt D den Kreis berühren.
In beliebig guter Näherung gilt dann:

$$\text{«Summe der Sinus»} = \sum DI \cdot EE' = \sum y \cdot \Delta s \overset{\text{Lemma}}{=} \sum OA \cdot RR'$$

$$= -\sum_{x_B}^{x_C} r \cdot \Delta x = -r \sum_{x_B}^{x_C} \Delta x = r\,(x_B - x_C) \tag{2}$$

$=$ Radius $\cdot$ Abschnitt zwischen den extremen Sinus. q.e.d.

Übersetzt man (2) in dem von Pascal intendierten Sinne und benutzt man die von Leibniz geschaffene Symbolik, so erhält man:

$$\int_{s_B}^{s_C} y\,ds = -\int_{x_B}^{x_C} r\,dx = -r\cdot\int_{x_B}^{x_C} dx = r\,(x_B - x_C). \tag{3}$$

Mit Hilfe des Winkels φ, den der Berührungsradius OD mit OA einschliesst, folgt:

$$y = r\sin\varphi, \quad ds = r\,d\varphi \quad \text{und} \quad x_B = r\cos\varphi_1 \quad \text{bzw.} \quad x_C = r\cos\varphi_2.$$

Aus (3) wird dann:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r\sin\varphi)\cdot r\,d\varphi = r^2\cdot\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi\,d\varphi = r\,(r\cos\varphi_1 - r\cos\varphi_2) \quad \text{oder}$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi\,d\varphi = \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2. \tag{4}$$

Selbstverständlich ist uns heutzutage die Beziehung (4) mit Hilfe des Hauptsatzes der Integralrechnung leicht zugänglich. Pascal ist es aber gelungen, mit der Indivisiblen-Methode und elementargeometrischen Hilfsmitteln allein zum Ziel zu kommen.
Wenn in dieser Beweisführung Strenge im modernen Sinne auch fehlt, so bestechen doch die *Anschaulichkeit* und die *Unmittelbarkeit* der Pascalschen Vorgehensweise.
Mit Hilfe des eben bewiesenen Satzes 1 konnte Pascal die Oberfläche O_k einer Kugelzone elegant berechnen (Fig. 4):

$$\begin{aligned} O_k &= \int_{s_B}^{s_C} 2\pi y\cdot ds = 2\pi\cdot\int_{x_B}^{x_C} r\cdot dx \\ &= 2\pi r\cdot(x_C - x_B) = 2\pi\cdot rh. \end{aligned}$$

Das Integral $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^2\varphi\,d\varphi$

In der Abhandlung über den Viertelskreis wird, auf die heutige Symbolik umgeschrieben, allgemein
das Integral $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^n\varphi\,d\varphi$, $n\in\mathbb{N}$ behandelt.
Die Aussage im Fall $n = 2$ führt zum Satz 2, der geometrisch leicht interpretierbar ist.

Satz 2 (Formulierung von Pascal). *Die Summe der Quadrate dieser Sinus (y) ist gleich der Summe der Ordinaten im Viertelskreis, die zwischen den extremen Sinus gelegen sind, multipliziert mit dem Radius.*

Die formale Übersetzung führt zu (Fig. 3):

$$\sum DI^2\cdot EE' = OA\cdot\sum DI\cdot RR'$$

oder

$$\sum_{sB}^{sC} y^2 \cdot \Delta s = -r \cdot \sum_{xB}^{xC} y \cdot \Delta x.$$

Beweis: $\sum y^2 \cdot \Delta s = \sum y (y \cdot \Delta s) \overset{\text{Lemma}}{=} - \sum y \cdot (r \cdot \Delta x) = -r \cdot \sum y \cdot \Delta x$ q.e.d.

In der Sprache der Integralrechnung lautet der Satz 2:

$$\int_{sB}^{sC} y^2 ds = -r \int_{xB}^{xC} y dx. \tag{5}$$

Nun ist wieder $y = r \sin\varphi$ und $ds = r d\varphi$.
Es folgt somit:

$$\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} (r^2 \sin^2\varphi) r d\varphi = -r \cdot F_{\varphi 1}^{\varphi 2}, \quad \text{wobei} \tag{6}$$

$F_{\varphi 1}^{\varphi 2} = \int_{xB}^{xC} y dx$ die Fläche unter dem Viertelskreis bedeutet, begrenzt von den Ordinaten in den Grenzpunkten B und C.
Aus Figur 3 lässt sich $F_{\varphi 1}^{\varphi 2}$ durch Zusammensetzung einer Sektorfläche mit zwei rechtwinkligen Dreiecken berechnen, und man erhält:

$$F_{\varphi 1}^{\varphi 2} = \frac{r^2}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{r^2 \cdot \cos\varphi_1 \sin\varphi_1}{2} - \frac{r^2 \cdot \cos\varphi_2 \sin\varphi_2}{2}.$$

Setzt man $F_{\varphi 1}^{\varphi 2}$ in (6) ein und dividiert auf beiden Seiten mit r^3, so folgt

$$\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} \sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\left[\varphi - \cos\varphi \sin\varphi\right]\Bigg|_{\varphi 1}^{\varphi 2}, \tag{7}$$

ein Resultat, das uns mit Benützung des Hauptsatzes der Integralrechnung und Anwendung der *partiellen Integration* im modernen Sinne zugänglich wäre.
Hinweis: Setzt man in (5) für $y = r \sin\varphi$ und $x = r\cos\varphi$, so folgt nach Division mit r^3

$$\int \sin^2\varphi d\varphi = - \int \sin\varphi d(\cos\varphi),$$

d.h. die Aussage von Satz 2 beinhaltet eine Änderung der Integrationsvariablen.

Schlussbetrachtungen

I. Die vorliegende Schrift mit historischem Hintergrund manifestiert die grossen Schwierigkeiten, die bei der Interpretation von Originalabhandlungen auftreten können. Sie sind bei Pascal besonders ausgeprägt, da sich dieser, wenn auch elegant, so doch nur rein verbal ausdrückt.

Im weitern zeigt die Abhandlung über den Viertelskreis recht eindrücklich, dass sich grosse Ideen an kleinen, unscheinbaren Problemen entwickeln und fast zur selben Zeit bei verschiedenen Mathematikern zu allgemeinen und endgültigen Theorien führen können. Leibniz hat erkannt, dass die Arbeitsweise mit dem charakteristischen Dreieck nicht auf den Viertelskreis beschränkt sein muss, sondern vielmehr auf allgemeine Kurven übertragbar ist[3]). Pascal und viele andere seiner Zeitgenossen haben konkrete Pionierarbeit geleistet, welche Leibniz und Newton vollendet haben.
II. Im *Mathematikunterricht* beschränkt man sich bei der Ermittlung von Flächeninhalten (bestimmte Integrale) in der Regel auf Potenzfunktionen.
Die heuristische Indivisiblen-Methode von Pascal zeigt einen elementargeometrischen, anschaulich erlebbaren Weg zur Bestimmung einfacher Integrale trigonometrischer Funktionen.

H. Loeffel
Hochschule St. Gallen

LITERATURVERZEICHNIS

1 Pascal: Œuvres complètes. Edition J. Chevalier, Bibliothèque de la Pléiade, Paris 1954.

 0013-6018/86/060083-06$1.50 + 0.20/0

Eine Familie von geschlossenen gleichflächigen Polyedern, die fast beweglich sind

I. Das Vierhorn

§1. Seit Cauchy (1812) weiss man, dass ein konvexes Polyeder mit unveränderlichen Seitenflächen bei gelenkigen Verbindungen längs der Kanten starr erscheint, weil seine Gestalt eindeutig bestimmt ist. Eine kleine Lücke im Beweisgang wurde später von Steinitz [6] ausgefüllt.
Nach Verzicht auf die Forderung der Konvexität kann die Eindeutigkeit der Form verlorengehen. Es lassen sich leicht nichtkonvexe Polyeder vom topologischen Typus der Sphäre angeben, die einen sprunghaften («kippenden») Übergang zwischen zwei existierenden Gestalten erlauben [6, 8]. Rücken zwei solche Nachbarformen zusammen, so entsteht ein infinitesimal bewegliches «Wackelpolyeder» mit am Modell deutlich merkbarer Instabilität. Das erste Beispiel gab Blaschke [1] mit seinen Wackeloktaedern; weitere Beispiele finden sich bei Goldberg [4] und beim ersten Autor dieser Mitteilung [9]. Wackeligkeit bleibt bei konvexen Polyedern noch ausgeschlossen [3], während sie sich bei

3) Darüber äussert sich Leibniz sehr klar und eindeutig in einem Brief an seinen Freund v. Tschirnhaus (1651–1708) vom Dezember 1679.