

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 41 (1986)
Heft: 5

Artikel: Die Gewinnung der Grundformen der sphärischen Trigonometrie aus der stereographischen Projektion
Autor: Jeger, M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-39476>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Gewinnung der Grundformen der sphärischen Trigonometrie aus der stereographischen Projektion

Die Herleitung des trigonometrischen Formel-Apparates für Eulersche sphärische Dreiecke stützt sich üblicherweise auf die Einbettung der Träger-Kugel in den 3-dimensionalen euklidischen Raum. In dieser Note soll gezeigt werden, dass die Basis-Formeln auch an der stereographischen Projektion eines sphärischen Dreiecks gewonnen werden können. Liegt die Bildfigur einmal vor, dann sind nur noch Ueberlegungen im Rahmen der 2-dimensionalen euklidischen Geometrie anzustellen.

Die stereographische Projektion ist eine bijektive Abbildung der vollen Kugel auf die konforme Ebene. Sie ist konform und transformiert Kreise auf der Kugel in Kreise oder Geraden der Bildebene. Insbesondere gehen Kugel-Grosskreise in Möbius-Kreise über, die den Hauptkreis h der stereographischen Projektion in diametralen Punkten schneiden.

Ein Eulersches Dreieck auf der Kugel ist gekennzeichnet durch

$$0 < a, b, c < \pi; \quad 0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi. \quad (1)$$

Mit dem Dreieck ABC ist auch das Nebendreieck ABC' Eulersch. C' ist der Diametralpunkt zu c auf der Kugel (Fig. 1). Da in einem Euler-Dreieck die Seitenlinien die kürzesten Verbindungen zwischen zwei Eckpunkten sind, besteht die Dreiecksungleichung

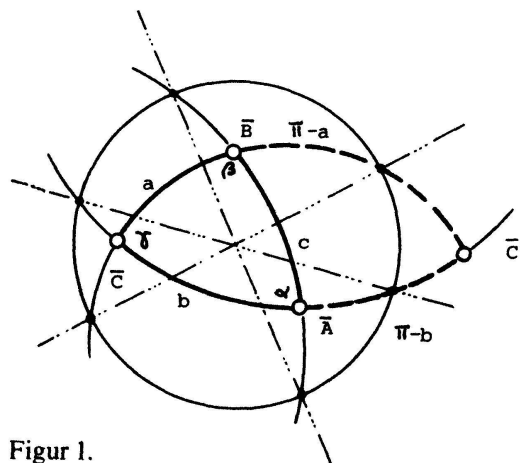
$$(\pi - a) + (\pi - b) > c.$$

Diese impliziert für das Primär-Dreieck ABC

$$a + b + c < 2\pi. \quad (2)$$

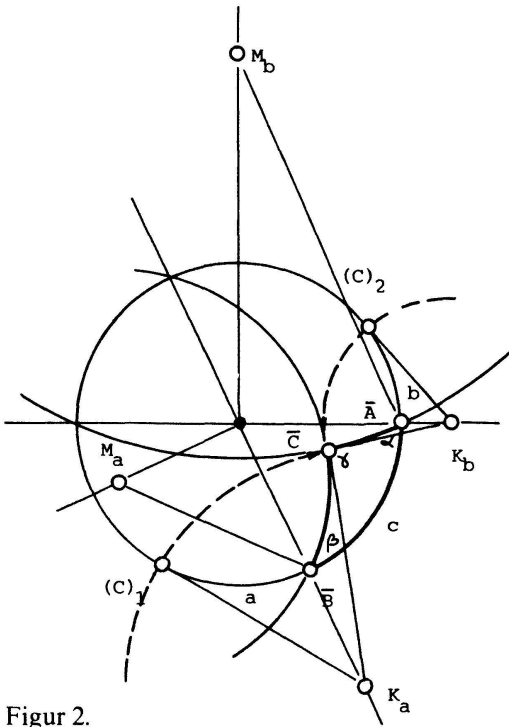
Der Umfang eines Euler-Dreiecks ist also immer kleiner als 2π .

Den folgenden Herleitungen liegt als Basis-Figur die Konstruktion eines Euler-Dreiecks aus den drei Seiten a, b, c in der stereographischen Projektion zugrunde. Wir

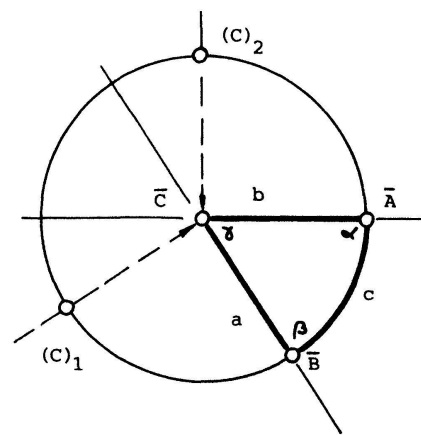


Figur 1.

stützen uns dabei auf das *Prinzip der speziellen Lage* und wählen als Träger-Grosskreis für die Seite c den Hauptkreis h . Man kann nun die Seiten a und b an c anschliessend auf h abtragen und erhält dann die dritte Ecke C durch Aufklappen der Seiten a und b . Wegen (2) entsteht beim Abtragen der drei Seiten auf h keine Ueberlappung. Beim Aufklappen bewegen sich die Endpunkte der Seiten a und b auf orthogonalen Kugelkreisen zu h ; K_a und K_b sind die Spitzen der Berührungskegel zu den beiden Bahnkurven (Fig. 2).



Figur 2.



Figur 3.

Ist insbesondere $a = b = \frac{\pi}{2}$, dann sind die Bahnkurven Grosskreise, deren stereographische Bilder Geraden sind (Fig. 3). Man kann unmittelbar aus der Fig. 3 herauslesen, dass in diesem Falle

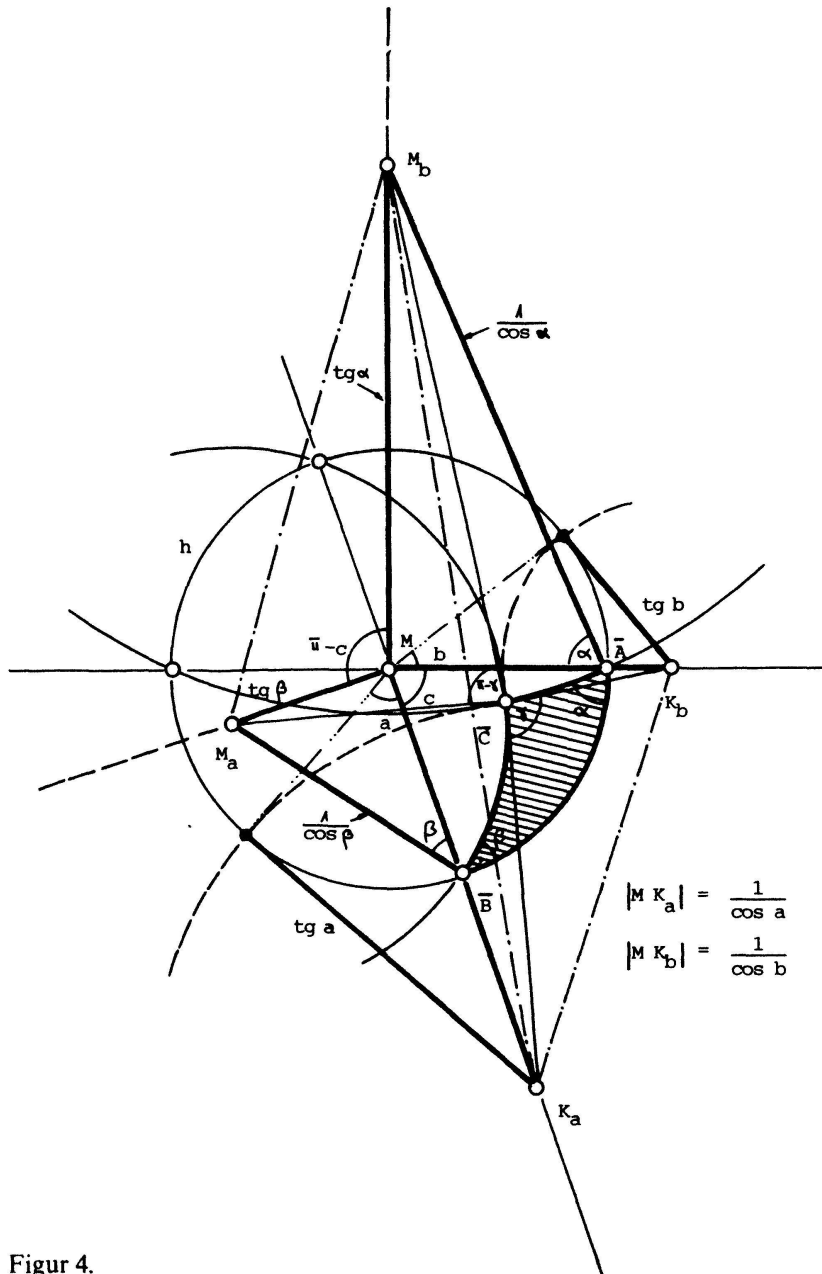
$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \gamma = c$$

ist.

In der Fig. 3 ist zugleich auch die Konstruktion eines Euler-Dreiecks aus der Seite c und den Winkeln $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ enthalten. In diesem Falle ist

$$a = b = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \gamma = c.$$

Wir setzen nun für die folgenden Herleitungen ein Euler-Dreieck voraus, das höchstens eine Seite vom Mass $\frac{\pi}{2}$ aufweist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass $a \neq \frac{\pi}{2}$ und $b \neq \frac{\pi}{2}$ ist. Die Fig. 4 zeigt die stereographische Projektion eines derartigen Kugel-Dreiecks bei Annahme der Punkte A und B auf dem Hauptkreis h .



Figur 4.

Unter Verwendung des Cosinus-Satzes der ebenen Geometrie werden nun die Strecken-Quadrate $|K_a K_b|^2$, $|M_a M_b|^2$ und $|K_a M_b|^2$ je auf zwei Arten berechnet.

$$1) \quad |K_a K_b|^2 = \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b - 2 \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \cos \gamma = \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{1}{\cos^2 b} - 2 \frac{1}{\cos a} \cdot \frac{1}{\cos b} \cos c.$$

Daraus folgt zunächst

$$- 2 \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \cos \gamma = \underbrace{\left(\frac{1}{\cos^2 a} - \operatorname{tg}^2 a \right)}_1 + \underbrace{\left(\frac{1}{\cos^2 b} - \operatorname{tg}^2 b \right)}_1 - \frac{2 \cos c}{\cos a \cos b}.$$

Multipliziert man die letzte Gleichung mit $\frac{1}{2} \cos a \cos b$, so erhält man

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma. \quad (3)$$

Dies ist die *Seiten-Cosinus-Formel* der sphärischen Trigonometrie.

$$\begin{aligned} 2) \quad |M_a M_b|^2 &= \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \cos(\pi - c) \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} - 2 \frac{1}{\cos \alpha} \frac{1}{\cos \beta} \cos(\pi - \gamma). \end{aligned}$$

Daraus entnimmt man

$$2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \cos c = \underbrace{\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha \right)}_1 + \underbrace{\left(\frac{1}{\cos^2 \beta} - \operatorname{tg}^2 \beta \right)}_1 + \frac{2 \cos \gamma}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Die Multiplikation der Gleichung mit $\frac{1}{2} \cos \alpha \cos \beta$ führt auf

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c. \quad (4)$$

Diese Beziehung wird als *Winkel-Cosinus-Formel* der sphärischen Trigonometrie bezeichnet.

$$\begin{aligned} 3) \quad |K_a M_b|^2 &= \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 a} - 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\cos a} \cos\left(\frac{\pi}{2} + c\right) \\ &= \operatorname{tg}^2 a + \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 2 \operatorname{tg} a \frac{1}{\cos \alpha} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \gamma\right). \end{aligned}$$

Daraus geht hervor, dass

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\cos^2 a} - \operatorname{tg}^2 a \right)}_1 + 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\cos a} \sin c = \underbrace{\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha \right)}_1 + 2 \operatorname{tg} a \frac{1}{\cos \alpha} \sin \gamma,$$

d. h.

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha \sin c}{\cos a} = \frac{\operatorname{tg} a \sin \gamma}{\cos \alpha}.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit $\cos a \cos \alpha$ erhält man schliesslich

$$\sin \alpha \sin c = \sin a \sin \gamma, \quad (5)$$

womit auch die *Sinus-Formel* der sphärischen Trigonometrie feststeht.

Wie man leicht bestätigt, gelten die Formeln (3), (4) und (5) auch für Euler-Dreiecke mit

$$a = b = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = c.$$

Mit den bis jetzt hergeleiteten Formeln lässt sich in bestimmten Fällen aus drei vorgegebenen Hauptstücken (Seiten, Winkel) eines Euler-Dreiecks ein viertes berechnen. Um diese Aufgabe generell bewältigen zu können, benötigt man ebensoviele Gleichungen, wie man aus 6 Objekten deren 4 auswählen kann. Diese Anzahl beträgt $\binom{6}{4} = 15$. Zieht man die möglichen zyklischen Vertauschungen in Betracht, dann liegen in den Formeln (3), (4) und (5) total $3 \cdot 3 = 9$ Bindungen dieser Art vor. Im minimalen Formel-Apparat der sphärischen Trigonometrie fehlen uns also noch 6 Beziehungen. Um diese zu erhalten, sind keine zusätzlichen geometrischen Ueberlegungen erforderlich; man kann die 6 noch fehlenden Formeln aus (3), (4) und (5) ableiten. Dazu ersetze man etwa in der Seiten-Cosinus-Formel

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma, \quad (6)$$

die Seite b vermöge

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta \quad \text{und} \quad \sin b = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \sin \beta$$

durch a, c, γ und β . Dies führt auf

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos^2 a \cos c + \cos a \sin a \sin c \cos \beta + \sin a \sin c \sin \beta \operatorname{ctg} \gamma, \\ \cos c (1 - \cos^2 a) &= \sin a \sin c (\cos a \cos \beta + \sin \beta \operatorname{ctg} \gamma). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich schliesslich

$$\operatorname{ctg} c \sin a = \cos a \cos \beta + \sin \beta \operatorname{ctg} \gamma. \quad (7)$$

Dies ist die *Cotangenten-Formel* der sphärischen Trigonometrie.

Da die Seiten und die Winkel untereinander zyklisch vertauscht werden können, stecken in der Formel (7) 3 Grundbeziehungen für Eulersche Dreiecke. Man kann nun in (6) auch $\cos a$ und $\sin a$ auf analoge Weise ersetzen und erhält dann noch drei weitere Grundbeziehungen vom selben Typus.

Die präsentierte Herleitung der Cosinus-Formeln und der Sinus-Formel aus der sphärischen Trigonometrie stützt sich weitgehend auf die Winkel- und M -Kreis-Treue der stereographischen Projektion. Dem Poincaré-Modell der ebenen hyperbolischen Geometrie liegt ebenfalls eine konforme Abbildung der massgebenden Trägerfläche zugrunde, bei der die Geodätischen in gewisse M -Kreise der Bildebene übergehen. Diese Situation hat H. Meschkowski bei der Herleitung des Basis-Formel-Apparates für die hyperbolische Trigonometrie ausgenutzt [1]. Im Gegensatz zu Meschkowski,

der zuerst Beziehungen für rechtwinklige Dreiecke aufsucht, werden hier sogleich allgemeine Dreiecke betrachtet.

M. Jeger, Mathematik-Departement, ETH-Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 H. Meschkowski: Die Ableitung der trigonometrischen Formeln im Poincaré-Modell der hyperbolischen Geometrie. El. Math. Vol. 7, 1952, p. 130–132.

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/86/050120-06\$1.50 + 0.20/0

Eine Bemerkung zum Schwarzschen Lemma

Von R. Mortini (Lösung der Aufgabe 901, El. Math., Vol. 39, 1984, S. 131) und in einem etwas allgemeineren Zusammenhang von A. Pfluger (Varianten des Schwarzschen Lemma, El. Math., Vol. 40, 1985, S. 46–47) ist u. a. folgendes bewiesen worden: Ist die Funktion f in der Einheitskreisscheibe $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ analytisch mit Werten in \mathbf{D} und ist $f(0) = 0$, so gilt in \mathbf{D} die Ungleichung

$$|f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2,$$

und für ein $z \in \mathbf{D} \setminus \{0\}$ tritt Gleichheit nur auf, wenn $f(z) = cz$ ist und $c \in \partial\mathbf{D}$. Dieses Resultat soll im folgenden auf den Fall erweitert werden, wo f die Einheitskreisscheibe analytisch in ein konvexes Gebiet der Ebene abbildet.

Es sei g eine in \mathbf{D} konvexe Funktion, d. h. die Funktion $g: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ sei eineindeutig und analytisch und ihr Bildgebiet konvex. Es wird nicht verlangt, dass g normiert, d. h. $g(0) = 0$ und $g'(0) = 1$ sei. Ist weiter die Funktion f in \mathbf{D} analytisch, ist $f(0) = g(0)$ und hat f seine Werte im Bildgebiet von g , so bildet die Funktion $\omega = g^{-1} \circ f$ die Einheitskreisscheibe \mathbf{D} in sich ab und verschwindet im Ursprung. Es hat also f die Darstellung

$$f = g \circ \omega, \tag{1}$$

wobei ω den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemma genügt. Immer dann, wenn zwei Funktionen f und g in \mathbf{D} analytisch sind und zwischen ihnen die Beziehung (1) besteht, heisst f zu g subordiniert. Mit der Bezeichnung $\{z \mid |z| < r\} = \mathbf{D}_r$ folgt dann aus (1) und dem Schwarzschen Lemma, dass $f(\mathbf{D}_r) \subset g(\mathbf{D}_r)$ und daher $|f(z)| \leq \max_{\theta} |g(z e^{i\theta})|$ ist für jedes r , $0 < r < 1$.

Es gilt der folgende

Satz: Ist eine in \mathbf{D} analytische Funktion f zu einer konvexen Funktion g subordiniert, so gilt

$$\frac{1}{2} |f(z) + f(-z)| \leq \max_{\theta} |g(z^2 e^{i\theta})|, \quad z \in \mathbf{D}. \tag{2}$$