

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 41 (1986)  
**Heft:** 5

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

To establish an upper bound of the form  $H \leq ax + b$ , with equality for equilateral triangles which occurs when  $x = 2$ , it is necessary only to determine the equation of the tangent line at the point  $(2, 3)$ , and this equation is  $y = 12x - 21$ : we now have

$$\sum IN_a \leq 12R - 21r. \quad (6)$$

If (6) and the known inequality  $\sum AI \leq 2R + 2r$ , [1] p. 103, is applied to (1), we obtain the inequality

$$\sum n_a \leq 14R - 19r \quad (7)$$

and this is an upper bound for the sequence as desired. We now have  $9r \leq \sum h_a \leq \sum g_a \leq \sum w_a \leq \sum m_a \leq \sum n_a \leq 14R - 19r$  with equality throughout when the given triangle is equilateral.

Roland H. Eddy, Memorial University of Newfoundland,  
St. John's, Newfoundland, Canada

#### REFERENCES

- 1 O. Bottema, R. Z. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić: Geometric Inequalities. Wolters-Noordhoff, Groningen 1969.
- 2 R. H. Eddy: A sequence of inequalities for certain sets of concurrent cevians. El. Math. 35, 145–146 (1980).
- 3 Roger A. Johnson: Advanced Euclidean Geometry. Dover Publications Inc. New York 1960.

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/86/050128-03\$1.50 + 0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 929.** Die Folge  $(a_n)$  sei definiert durch

$$a_0 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{3 + (-1)^n}{2} \quad (n \geq 0).$$

Man ermittle

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{[(n+1)/2]}}{a_n^2 - 1} \quad ([ ]: \text{Ganzteilmfunktion}).$$

M. Vowe, Therwil

**Lösung:** Mit vollständiger Induktion zeigt man, dass  $a_{4n} = 6n + 2$ ,  $a_{4n+1} = 6n + 4$ ,  $a_{4n+2} = 6n + 5$ ,  $a_{4n+3} = 6n + 7$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(6n+2)^2 - 1} - \frac{1}{(6n+4)^2 - 1} - \frac{1}{(6n+5)^2 - 1} + \frac{1}{(6n+7)^2 - 1} \right].$$

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right]$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{6n+1} - \frac{1}{6n+4} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{6n+5} - \frac{1}{6n+8} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{6n+3} - \frac{1}{6n+6} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+5} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+3} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+3} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Die Summen der auftretenden Reihen sind bekannt. Man erhält:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \right) - \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{4},$$

also

$$s = \frac{1}{4}.$$

P. Streckeisen, Zürich

Weitere Lösungen sandten H. Alzer (Waldbröl, BRD), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), K. Dilcher (Halifax, CD), F. Grüter, A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-wai Lau (Hongkong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr. A. Meyer (Bern), I. Paasche (Stockdorf, BRD), M. Vowe (Therwil; 2. Lösung), K. Warneke (Vechta, BRD), H. Widmer (Rieden), R. Wyss (Flumenthal). Eine Lösung war falsch.

**Aufgabe 930.** Mit den Bezeichnungen von Aufgabe 899 (El. Math. 39, 102–103 (1984)) und den Abkürzungen  $H$  bzw.  $G$  für das harmonische bzw. das geometrische Mittel der drei Innenwinkel gilt die Doppelungleichung

$$(3H/\pi)^3 \leq 2r/R \leq (3G/\pi)^3. \tag{*}$$

Man beweise den linken Teil von (\*).

V. D. Mascioni, Origgio

Lösung: Wir beginnen mit der Bemerkung, dass die durch

$$F(x_1, x_2, x_3) := \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right)^3 (\sin x_1) (\sin x_2) (\sin x_3) \tag{1}$$

definierte positivwertige Funktion in dem in  $R_+^3$  gelegenen Teil der durch die Gleichung  $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{\pi}{2}$  beschriebenen Ebene offenbar ein absolutes Minimum hat, welches mittels Lagrangescher Multiplikatorenregel bestimmt werden kann. Dazu sind die partiellen Ableitungen von  $F$  zu ermitteln, und

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3) = (\cot x_i - 3x_i^{-2}) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) F(x_1, x_2, x_3)$$

für  $i = 1, 2, 3$  zeigt in Verbindung mit der erwähnten Regel, dass sämtliche drei Differenzen  $\cot x_i - 3x_i^{-2}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) gleich sein müssen. Die im Intervall  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  definierte Funktion  $f(x) := \cot x - 3x^{-2}$  ist dort wegen

$$f'(x) = \left( \frac{6}{x} - \left( \frac{x}{\sin x} \right)^2 \right) x^{-2} > \left( \frac{12}{\pi} - \frac{\pi^2}{4} \right) x^{-2} > 0$$

(man beachte  $\sin x > \frac{2}{\pi}x$  im betrachteten Intervall) streng monoton wachsend, weshalb alle  $x_i$  einander gleich sein müssen.

Daher ist

$$F(x_1, x_2, x_3) \geq F\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{9}{\pi}\right)^3 \quad (2)$$

mit Gleichheit genau für  $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{\pi}{6}$ .

Sind nun  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  die Innenwinkel eines ebenen Dreiecks mit Inkreisradius  $r$  und Umkreisradius  $R$ , so erhält man aus (2), angewandt mit  $x_i := \frac{1}{2} \alpha_i$  für  $i = 1, 2, 3$ , mit Rücksicht auf (1)

$$\begin{aligned} \left(\frac{9}{\pi}\right)^3 &\leq F\left(\frac{1}{2}\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{2}\alpha_3\right) = \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}\right)^3 \prod_{i=1}^3 2 \sin \frac{1}{2}\alpha_i \\ &= \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}\right)^3 \frac{2r}{R}, \end{aligned}$$

woraus mit  $\left(\frac{3H}{\pi}\right)^3 \leq \frac{2r}{R}$  genau die behauptete Ungleichung folgt. Übrigens gilt in ihr das Gleichheitszeichen genau dann, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre).

**Aufgabe 931.** Eine Gerade  $g_1$  verläuft durch den Endpunkt  $A$  eines ebenen Dreiecks  $ABC$  und schneidet  $BC$  im Punkt  $D$ . Eine zweite Gerade  $g_2$  schneidet  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  bzw. in  $F$ ,  $E$ ,  $G$ . Es sei  $x = \overline{BF}/\overline{FA}$ ,  $y = \overline{CE}/\overline{EA}$ ,  $z = \overline{DG}/\overline{GA}$ . Man charakterisiere diejenigen Geradenpaare  $(g_1, g_2)$ , für welche  $z$  a) das arithmetische, b) das harmonische, c) das geometrische Mittel von  $x$  und  $y$  ist.

G. Bercea, München, BRD

Lösung (Bearbeitung der Redaktion): Der Fall  $g_2 \parallel BC$  ist trivial. Es sei also  $g_2 \not\parallel BC$  und  $g_2 \cap BC = \{H\}$ . Mit  $p := \overline{BH}$ ,  $q := \overline{HC}$ ,  $m := \overline{HD}$  lautet nun unsere Behauptung:

$$z = (x + y)/2 \quad \Leftrightarrow \quad m = (p + q)/2 \quad (\text{arithmetisches Mittel})$$

$$z = \sqrt{x \cdot y} \quad \Leftrightarrow \quad m = \sqrt{p \cdot q} \quad (\text{geometrisches Mittel})$$

$$z = 2xy/(x + y) \quad \Leftrightarrow \quad m = 2pq/(p + q) \quad (\text{harmonisches Mittel}).$$

Beweis: Nach dem Satz von Menelaos, angewandt auf die Transversale  $g_2$  und die Teildreiecke  $ABD$  bzw.  $ACD$ , gilt  $(x/z)(m/p) = 1$  bzw.  $(y/z)(m/q) = 1$ . Daraus ergibt sich  $x = pz/m$  bzw.  $y = qz/m$  und somit unmittelbar die Behauptung. Danach ist  $m$  und damit  $g_1$  in geläufiger Weise konstruierbar.

K. Warneke, Vechta, BRD

Eine weitere Lösung sandte L. Kuipers (Sierre).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis 10. April 1986 an Dr. H. Kappus. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit Problem ... A, B bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68).

**Aufgabe 947.** Es bezeichne  $F(n)$  die  $n$ -te Fibonaccizahl. Man ermittle den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n F(2n+1)}{F(n^2) F((n+1)^2)}.$$

L. Kuipers, Sierre

**Aufgabe 948.** Es sei  $F \in C^1[0, \infty)$ ,  $F(0) = 1$ ,  $F'(x) > 0$  für  $x \in [0, \infty)$ . Man zeige, dass die Funktionalgleichung

$$F(xf(x)) = \frac{f(x) + x}{f(x) - x}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung  $f \in C^1(0, \infty)$  besitzt, und ermittle  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

P. Meier, Basel

**Aufgabe 949.** In terms of the basic (or  $q$ -) number  $[\lambda]$  and basic (or  $q$ -) factorial  $[n]!$  defined by

$$[\lambda] = \frac{1 - q^\lambda}{1 - q}; \quad [n]! = [1][2][3] \dots [n], \quad [0]! = 1, \tag{1}$$

let the basic (or  $q$ -) binomial coefficient be given by

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} \lambda \\ n \end{bmatrix} = \frac{[\lambda][\lambda - 1] \dots [\lambda - n + 1]}{[n]!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{2}$$

for arbitrary (real or complex)  $q$  and  $\lambda$ ,  $|q| < 1$ . Also let

$$S_q(\lambda, n; r) = \sum_{i=0}^n \left\{ \begin{bmatrix} \lambda + i \\ i \end{bmatrix} r^{-1} - (r - q^{\lambda+1}) \begin{bmatrix} \lambda + i + 1 \\ i \end{bmatrix} r^{-i-1} \right\}, \tag{3}$$

where  $r$  is a nonzero constant.

Show that

$$S_q(\lambda, n; r) = \frac{q^{\lambda+1}}{r^{n+1}} \begin{bmatrix} \lambda + n + 1 \\ n \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{4}$$

Remark: Since

$$\lim_{q \rightarrow 1} \begin{bmatrix} \lambda \\ n \end{bmatrix} = \frac{(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1)}{n!} = \binom{\lambda}{n},$$

a limiting case of (4) when  $q \rightarrow 1$  would yield problem 904 (see [2]) if we further set  $r = 2$  and  $\lambda = x + n$ ,  $x$  being a real number.

H. M. Srivastava, Victoria, CD

REFERENCES

- 1 E. Heine: Handbuch der Kugelfunktionen; Theorie und Anwendungen, vol. 1, 2nd ed. G. Reimer, Berlin 1878.
- 2 L. Kuipers and J. Binz: Aufgabe 904. Elem. Math. 40, 25–26 (1985).
- 3 H. M. Srivastava and P. W. Karlsson: Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Halsted Press, John Wiley and Sons, New York 1985.