

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Band: 43 (1988)
Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 08.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

REFERENCES

- 1 E. E. Kummer: Über die hypergeometrische Reihe J. Reine Angew. Math. 15, 39–83 and 127–172 (1836).
- 2 H. M. Srivastava, P. W. Karlsson: Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane and Toronto 1985.
- 3 M. Vowe, H.-J. Seiffert: Aufgabe 946. Elem. Math. 42, 111–112 (1987).

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/88/020054-05 \$ 1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 957. Man beweise die Ungleichung

$$\sin(x/2) + \cos x < (\pi - x)/2; \quad 0 < x < \pi.$$

P. Ivady, Budapest, Ungarn

Lösung. Für $0 < x < \pi$ gilt nach einer bekannten Identität

$$\begin{aligned} \sin(x/2) + \cos x &= 2 \sin((\pi - x)/4) \cos((3x - \pi)/4) \\ &< 2 \sin((\pi - x)/4) \\ &< (\pi - x)/2. \end{aligned}$$

A. A. Jagers, Enschede, NL

Weitere Lösungen sandten S. Arslanagic (Trebinje, YU), A. Bender (Zürich), H. Bopp (Illingen), E. Braune (Linz, A), P. Bracken (Toronto, CD), P. Bundschuh (Köln, BRD), F. Götze (Jena, DDR), M. Hübner (Leipzig, DDR), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hongkong), I. Merenyi (Berveni, RU), A. Müller (Zürich), P. Müller (Nürnberg, BRD), H.-J. Seiffert (Berlin), Tsen-Pao Shen (München, BRD), H. M. Smid (Amsterdam, NL), M. Vowe (Therwil), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 958. Es seien

$$x_n := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \binom{n}{k} \quad \text{und} \quad y_n := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Man berechne: $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \log y_n)$.

H. Alzer, Waldbröl, BRD

Lösung. Mit dem binomischen Lehrsatz bestätigt man sofort die Darstellungen

$$x_n = \int_0^1 \{1 - (1-t)^n\}/t dt = \int_0^1 (1-s^n)/(1-s) ds = \int_0^1 (1+s+\dots+s^{n-1}) ds = \\ = 1 + 1/2 + \dots + 1/n \quad \text{und}$$

$$y_n = \int_0^1 (1-t)^{n-1} dt = 1/n, \quad \text{also } \log y_n = -\log n.$$

Der gesuchte Grenzwert ist daher die Eulersche Konstante C .

W. Janous, Innsbruck, A.

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bollingen), P. Bundschuh (Köln, BRD), K. Dilcher (Halifax, CD), F. Götze (Jena, DDR), M. Hübner (Leipzig, DDR), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hongkong), Chr. A. Meyer (Bern), A. Müller (Zürich), P. Müller (Nürnberg, BRD), S. Nanba (Okayama, Japan), P. Sakmann (Wangen), H.-J. Seiffert (Berlin), H. M. Smid (Amsterdam, NL), H. Widmer (Rieden), R. Wyss (Flumenthal), M. Vowe (Therwil).

Aufgabe 959. Es seien p, q_1, \dots, q_n paarweise verschiedene ungerade Primzahlen mit $p < q_i$ ($i = 1, \dots, n$) und mit der Eigenschaft, dass $-q_i$ quadratischer Rest mod p ist ($i = 1, \dots, n$). Man beweise oder widerlege: Jede natürliche Zahl m der Art

$$m = q_1^{v_1} q_2^{v_2} \dots q_n^{v_n}; \quad v_i \in \mathbb{N}_0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

lässt sich in der Form

$$m = x^2 + p y^2; \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

darstellen.

A. Bege, Cluj, Rumänien

Lösung. Die Aussage wird wie folgt widerlegt. Man wähle eine beliebige Primzahl $p \equiv 3 \pmod{4}$ und dann q_1, \dots, q_n als paarweise verschiedene Primzahlen der Form $kp - 1$ mit $k \in \{2, 3, \dots\}$; nach dem Dirichletschen Satz ist dies möglich. Offenbar ist $p < q_i$ und $-q_i \equiv 1 \pmod{p}$, also $-q_i$ quadratischer Rest modulo p , jeweils für $i = 1, \dots, n$. Somit sind die generellen Voraussetzungen der Aufgabenstellung erfüllt. Dennoch ist kein natürliches m der Form $q_1^{v_1} \dots q_n^{v_n}$ mit ungerader Exponentensumme $v_1 + \dots + v_n$ in der Gestalt $x^2 + p y^2$ darstellbar: Andernfalls wäre nämlich

$$-1 = (-1)^{v_1 + \dots + v_n} \equiv q_1^{v_1} \dots q_n^{v_n} = x^2 + p y^2 \equiv x^2 \pmod{p},$$

d. h. -1 wäre quadratischer Rest modulo p , was jedoch der Wahl $p \equiv 3 \pmod{4}$ widerspricht.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Eine weitere Lösung sandte W. Janous (Innsbruck, A).

Aufgabe 960. Man bestimme den Ort des Punktes, in welchem sich zwei Kreise, die der Parabel $y^2 = 2px$ einbeschrieben sind, unter rechten Winkeln schneiden.

C. Bindschedler, Künsnacht

Lösung. Die Normale der Parabel $y^2 = 2px$ hat im Punkte $(x, \sqrt{2px})$ die Steigung $-\sqrt{2px}/p$, der Mittelpunkt eines dort berührenden, symmetrisch zur x -Achse liegenden Kreises hat daher die x -Koordinate $x + p$ und den Radius $\sqrt{p^2 + 2px}$.

Seien x_1, x_2 die x -Koordinaten zweier einbeschriebener Kreise, die sich im Punkte (x, y) orthogonal schneiden. Sie haben die Radien $r_i = \sqrt{p^2 + 2p(x_i - p)} = \sqrt{2px_i - p^2}$ für $i = 1, 2$. Der Satz des Pythagoras in den Dreiecken $\Delta((x_i, 0), (x, 0), (x, y))$ lehrt nun

$$\begin{aligned} r_i^2 &= 2px_i - p^2 = (x - x_i)^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow x_i^2 - 2(x + p)x_i + p^2 + y^2 + x^2 &= 0, \end{aligned}$$

also sind die x_i Nullstellen des Polynoms $z^2 - 2(x + p)z + p^2 + y^2 + x^2 = (z - x_1) \cdot (z - x_2)$. Zum Schluss verwenden wir den Höhensatz im Dreieck $\Delta((x_1, 0), (x_2, 0), (x, y))$ und finden

$$\begin{aligned} y^2 &= (x - x_1)(x_2 - x) = -(x - x_1)(x - x_2) \\ &= -x^2 + 2(x + p)x - p^2 - y^2 - x^2 \\ \Leftrightarrow 2y^2 &= 2px - p^2 \\ \Leftrightarrow y^2 &= 2\left(\frac{p}{2}\right)\left(x - \frac{p}{2}\right) \end{aligned}$$

d. h. eine um $p/2$ verschobene Parabel mit Parameter $p/2$.

Nun muss aber $x_1 \geq p$ sein. Indem wir die gefundene Parabel mit dem Kreis $(x - p)^2 + y^2 = p^2$ schneiden, finden wir die zulässigen x -Werte als Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned} p\left(x - \frac{p}{2}\right) &= p^2 - (x - p)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - px - \frac{p^2}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Als Lösung erhalten wir die beiden Parabelbögen

$$\left\{ (x, y) \mid x \geq x_{\min} := \frac{1 + \sqrt{3}}{2} p \doteq 1.366 \cdot p \quad \text{und} \quad y^2 = p\left(x - \frac{p}{2}\right) \right\}.$$

Bemerkung: Diese Parabel wird durch Streckung der gegebenen für x -Werte $\geq \sqrt{3}$ um den Faktor $\frac{1}{2}$ mit Streckenzentrum $(p, 0)$ erhalten:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2\frac{p}{2}\left(p + \Delta x - \frac{p}{2}\right) &= 4p\left(\frac{p}{2} + \Delta x\right) \\ &= 2p(p + 2\Delta x). \end{aligned}$$

A. Müller, Zürich

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), G. Seltmann (Dresden, DDR), Tsen-Pao Shen (München, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil), G. Unger (Dornach), M. Vowe (Therwil), H. Widmer (Rieden), R. Wyss (Flumenthal).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzigen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis 10. Oktober 1988 an Dr. H. Kappus. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu dem mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 981. Man beweise oder widerlege folgende Aussage:
Das Polynom

$$f(x) = x^5 + x - t$$

ist über \mathbb{Z} irreduzibel, wenn $t = \pm p^n$, p Primzahl, $n \in \mathbb{N}$ und $p^n > 2$.

O. Buggisch, Darmstadt, BRD

Aufgabe 982. Es seien s, n, m feste natürliche Zahlen und P die Menge aller Partitionen

$$s = \sum_{i=1}^n k_i$$

von s mit nichtnegativen ganzen Summanden k_i . Man bestimme

$$S(s, n, m) := \text{Min}_P \sum_{i=1}^n \binom{k_i}{m}.$$

J. Binz, Bollingen

Aufgabe 983. Für $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k \geq n$ ist die Summe

$$\sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} (z - m)^n$$

geschlossen auszuwerten.

W. Koepf, Berlin

Aufgabe 984. Es seien α, β, γ die Innenwinkel, r der Inkreisradius und R der Umkreisradius eines ebenen Dreiecks. Man zeige, dass

$$\frac{2R^2 - 2Rr - r^2}{4R^2} \leq \sin^4(\alpha/2) + \sin^4(\beta/2) + \sin^4(\gamma/2) \leq \frac{4R^2 - 8Rr + 3r^2}{4R^2},$$

mit Gleichheit genau im gleichseitigen Fall.

D. M. Milosevic, Pranjani, YU