Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Band: 43 (1988)
Heft: 5

Artikel: Un problème de probabilité maximale
Autor: Carnal, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40811

3. If $j = 2^a p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ with $a \geq 2$, then

$$D(j,n) = \min \{k \mid k \geq 2n,\ k = p \text{ or } 2p \text{ with } p \not\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ p_i),\ i = 1, \dots, r, \text{ and } p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4)\}.$$

In [6] a proof is given for $j = 3$ and $j = 6$, and all n, using the theory of binary quadratic forms.

P. Schumer, Department of
Mathematics and Computer Science,
Middlebury College

J. Steinig,
Section de Mathématiques
Université de Genève

REFERENCES

1 L. K. Arnold, S. J. Benkoski and B. J. McCabe: The Discriminator (A Simple Application of Bertrand's Postulate). Amer. Math. Monthly *92,* 275–277 (1985).
2 P. S. Bremser, P. D. Schumer and L. C. Washington: A Note on the Incongruence of Consecutive Integers to a Fixed Power, preprint.
3 R. Breusch: Zur Verallgemeinerung des Bertrandschen Postulates, dass zwischen x und $2x$ stets Primzahlen liegen. Math. Z. *34,* 505–526 (1932).
4 P. Erdös: Über die Primzahlen gewisser arithmetischer Reihen. Math. Z. *39,* 473–491 (1935).
5 G. H. Hardy and E. M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford 1979.
6 P. Schumer: On the Incongruence of Consecutive Cubes, preprint.

 0013-6018/88/050145-05$1.50+0.20/0

Un problème de probabilité maximale

Dans un récent article [1], on trouve le théorème suivant:

Théorème: Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, distribuées selon des lois géométriques de paramètres $r_1, \dots, r_n$, le maximum de la probabilité $P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = i)$ est atteint, pour n et i donnés, lorsque $r_1 = \dots = r_n = i/(n+i)$.

Nous donnons ici une démonstration élémentaire du théorème. Soit F l'ensemble des lois de probabilités sur N avec la convolution $p * q(i) = \sum p(j)\, q(i-j)$. Soit $g_r(i) = s \cdot r^i$ (avec $s = 1 - r$) la loi géométrique de paramètre $r \geqq 0$ et $G_n = \{g_{r(1)} * g_{r(2)} * \dots * g_{r(n)}\}$ l'ensemble des convolutions de n lois géométriques.

Lemme 1: Si $p \in G_n$ et que l'on définit $\Delta p(i) = p(i) - p(i-1)$, il existe $i_0 = i_0(p)$ tel que $\Delta p(i) \geqq 0$ pour $i < i_0$ et $\Delta p(i) < 0$ pour $i \geqq i_0$ (unimodularité).

Preuve: On suppose, par hypothése d'induction, que $p \in G_n$ est unimodulaire et l'on considère $q = p * g_r$.
On trouve

$$q(i) = s p(i) + r q(i-1) \tag{1}$$

$$r \Delta q(i) = s(p(i) - q(i)). \tag{2}$$

Donc $\Delta p(i) \geqq 0 \Leftrightarrow p(i) \geqq q(i)$. Si $i < i_0(p)$, on a $q(i) \leqq \max\{p(j): j \leqq i\} = p(i)$, donc $\Delta q(i) \geqq 0$. Posons $i_0(q) = \min\{i: \Delta q(i) < 0\} \geqq i_0(p)$. S'il existait des $j > i_0(q)$ avec $\Delta q(j) \geqq 0$, on pourrait choisir le plus petit d'entre eux et on aurait $q(j-1) \leqq q(j) \leqq p(j)$ et $p(j) < p(j-1)$ puisque $i_0(q) \geqq i_0(p)$, donc $\Delta q(j-1) \geqq 0$ (cf. 2), ce qui contredit la minimalité de j.

Lemme 2: Pour $p \in G_n$ et $i \in \mathbb{N}$ donnés, il existe au plus un $r > 0$ tel que $p(i) = p * g_r(i)$.

Preuve: Soit r une solution, $q = p * g_r$, $\bar{r} > r$ et $\bar{q} = p * g_{\bar{r}}$.
Le lemme 1 et (2) montrent que $p(i) = q(i)$ implique $i < i_0(q)$, donc $q(j-1) \leqq q(j) \leqq p(j)$ pour $j \leqq i$, donc
$q(j) - \bar{q}(j) = (\bar{r} - r)[p(j) - q(j-1)] + \bar{r}[q(j-1) - \bar{q}(j-1)] \geqq \bar{r}[q(j-1) - \bar{q}(j-1)]$ et l'on démontre par induction sur j (à partir de $q(0) - \bar{q}(0) = (\bar{r} - r)p(0) > 0$) que $q(j) - \bar{q}(j) > 0$ pour $j \leqq i$, donc que $\bar{q}(i) \neq p(i) = q(i)$.

Preuve du théorème: On utilise les identités

$$g_r * g_r(i) = s^2 (i+1) r^i \tag{3}$$

$$\frac{d}{dr} g_r(i) = s \cdot i \cdot r^{i-1} - r^i = s^{-1}[(g_r * g_r(i-1) - g_r(i)] \tag{4}$$

Si $p(i)$ est maximal pour $p = \bar{p} * g_r (r > 0)$, on doit avoir

$$0 = \frac{d}{dr} \bar{p} * g_r(i) = s^{-1}[\bar{p} * g_r * g_r(i-1) - \bar{p} * g_r(i)] = s^{-1}[p * g_r(i-1) - p(i)] \tag{5}$$

Il résulte de (1) et de $p * g_r(i-1) = p(i)$ que $p(i) = p * g_r(i)$.
Le lemme 2 implique alors que tous les facteurs non trivials de p sont égaux.
Si p est produit de m facteurs g_r, p est une loi binomiale-négative avec $p(i) = \binom{m+i-1}{i} s^m r^i$.
La condition $p(i) = p * g_r(i-1)$ (cf. 5) donne $mr/i = s = 1 - r$, donc $r = i/(m+i)$ et $p(i) = \binom{m+i-1}{i} n^n i^i/(n+i)^{n+i}$, expression que nous notons $M_i(m)$. Il suffit finalement de démontrer que $M_i(m) < M_i(m+1)$ ou que $[m/(m+1)]^{m+1} < [(m+i)/(m+i+1)]^{m+i+1}$. Cela se déduit du fait que $f(x) = [x/(x+1)]^{x+1}$, de dérivée logarithmique

$x^{-1} + \log x - \log(x+1) > 0$, est monotone croissante. Il faut donc, pour obtenir $\max\{p(i);\, p \in G_n\}$, choisir $m = n$ et $r = i/(n+i)$.

Remarque: Le théorème a un analogue sous forme continue: Si f est convolution de n densités exponentielles $g_s(x) = se^{-sx}$, la plus grande valeur de $f(x)$ est atteinte lorsque tous les facteurs ont le même paramètre $s = n/x$.

H. Carnal, Institut für math. Statistik der Universität Bern

REFERENCES

1 Rätz J. et Russell D.: An extremal problem related to probability, Aeq. Math. *34*, 316–324 (1987).

 0013-6018/88/050149-03$1.50+0.20/0

Remarks on the note "Generalization of a formula of C. Buchta about the convex hull of random points"

For any convex body K in the d-dimensional Euclidean space E^d ($d \geqq 2$) let $V_n^{(d)}(K)$ be the expected volume of the convex hull H_n of n independent random points chosen identically and uniformly from the interior of K.
For arbitrary plane convex sets, respectively three-dimensional convex bodies, Buchta [2] proves the relationships

$$V_4^{(2)}(K) = 2\, V_3^{(2)}(K) \tag{1}$$

and

$$V_5^{(3)}(K) = \tfrac{5}{2}\, V_4^{(3)}(K). \tag{2}$$

In a recent note [1] we generalize Buchta's formulae (1) and (2) to

$$V_{2m}^{(2)}(K) = \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_{2m-2k+1}\, V_{2m-2k+1}^{(2)}(K) \quad m = 2, 3, \ldots \tag{3}$$

and

$$V_{2m+1}^{(3)}(K) = \sum_{k=1}^{m-1} \beta_{2m-2k+2}\, V_{2m-2k+2}^{(3)}(K) \quad m = 2, 3, \ldots, \tag{4}$$

where $\alpha_{2m-2k+1}$ and $\beta_{2m-2k+2}$ are constants defined by certain recursion formulae (cf. [1], formulae (1.4′), (1.4″), (1.5′) and (1.5″)).