Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 44 (1989)

Heft: 1

Artikel: Eine Integralungleichung für streng monotone Funktionen mit logarithmisch konvexer Umkehrfunktion

Autor: Seiffert, H.-J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41604

Eine Integralungleichung für streng monotone Funktionen mit logarithmisch konvexer Umkehrfunktion

In [7] wird bewiesen, dass für $a > 0$ und $b > 0$ die Zahl

$$I(a,b) = \frac{1}{e}(b^b/a^a)^{1/(b-a)},\ a \neq b,\ I(a,a) = a$$

zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel von a und b liegt. Weitere Beweise dazu finden sich in [1], [6] und [9], Verschärfungen in [2] und [8].
In dieser Note wird eine Integralungleichung bewiesen, in der $I(a,b)$ eine wichtige Rolle spielt. Die Aussage des folgenden vorbereitenden Lemmas wurde in [3] als Aufgabe gestellt, Lösungen finden sich in [4] und [5].
Lemma: Ist $c > 0$, so gilt

$$\lim_{n \to \infty} \left(\prod_{i=1}^{n} (c + (i-1)/n) \right)^{1/n} = \frac{(c+1)^{c+1}}{e\, c^c}.$$

Fortan sei $a > 0$, $b > 0$ und $a \neq b$ vorausgesetzt.

Satz: *Besitzt die streng monoton wachsende Funktion $f \in C\,[a,b]$ eine logarithmisch konvexe Umkehrfunktion, so gilt*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq f(I(a,b)).$$

Die umgekehrte Ungleichung gilt, falls f streng monoton fällt.
Beweis: O.B.d.A. sei $a < b$. Für jede natürliche Zahl n bildet die Menge $\{x_i = a + (i-1)(b-a)/n \mid i = 1, \ldots, n+1\}$ eine Zerlegung des Intervalls [a, b]. Ist f streng monoton wachsend, so gilt $f(a) \leq f(x_i) \leq f(b)$ f.a. $i = 1, \ldots, n$.
Da f stetig ist, gilt folglich

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \in [f(a), f(b)] = f([a,b]). \tag{*}$$

In ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass (*) auch gilt, falls f streng monoton fällt. f^{-1} ist nach Voraussetzung logarithmisch konvex, so dass man die Ungleichung

$$f^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right) \leq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$$

erhält, deren linke Seite wegen (*) wohldefiniert ist. Da f auf einem kompakten Intervall stetig ist, ist auch f^{-1} stetig, so dass

$$\lim_{n \to \infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right) = f^{-1}\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx\right).$$

Ferner hat man aufgrund des obigen Lemmas (mit $c = a/(b-a)$)

$$\lim_{n \to \infty} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} = I(a,b),$$

womit der Satz bewiesen ist. Q.E.D.

Man rechnet leicht nach, dass für $f(x) = \log x$ in der Ungleichung des obigen Satzes das Gleichheitszeichen steht.

Für eine zweimal auf $[a,b]$ differenzierbare Funktion f: $[a,b] \to \mathbb{R}$ gilt der folgende Sachverhalt:

Ist $f'(x) > 0$ (und damit f streng monoton wachsend) auf $[a,b]$, so ist f^{-1} genau dann logarithmisch konvex, wenn $f'(x) + x f''(x) \leq 0$ auf $[a,b]$ gilt.

Ist $f'(x) < 0$ (und damit f streng monoton fallend) auf $[a,b]$, so ist f^{-1} genau dann logarithmisch konvex, wenn $f'(x) + x f''(x) \geq 0$ auf $[a,b]$ gilt.

Beispiel: Es seien $0 < p < 1$, $0 \leq h \leq (1-p) \min(a,b)$ und f: $[a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = (x+h)^{p-1}$. Offensichtlich ist $f'(x) < 0$ und $f'(x) + x f''(x) \geq 0$ auf $[a,b]$, so dass nach einer der obigen Bemerkungen der Satz anwendbar ist.

Er liefert die Ungleichung

$$S_p(a+h,\ b+h) \leq I(a,b) + h \tag{1}$$

mit dem Stolarsky'schen Mittel [7] $S_r(c,d)$, das für $c > 0$ und $d > 0$ wie folgt definiert ist: Für alle reellen Zahlen $r \neq 0, 1$ sei

$$S_r(c,d) = \left(\frac{c^r - d^r}{r(c-d)}\right)^{1/(r-1)}, \quad c \neq d, \quad S_r(c,c) = c,$$

sowie $S_1(c,d) = I(c,d)$, $S_0(c,d) = L(c,d)$ mit dem logarithmischen Mittel

$$L(c,d) = \frac{c-d}{\log c - \log d}, \quad c \neq d, \quad L(c,c) = c.$$

Lässt man in (1) p gegen 0 streben, so erhält man

$$L(a+h, b+h) \leq I(a,b) + h \quad \text{für} \quad 0 \leq h \leq \min(a,b).$$

Für $h = 0$ sind diese Ungleichungen bekannt [7].

H.-J. Seiffert, Berlin, BRD

LITERATUR

1 Alzer H.: Über einen Wert, der zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel zweier Zahlen liegt. El. Math. *40*, 22–24 (1985).
2 Alzer H.: Ungleichungen für $(e/a)^a (b/e)^b$. El. Math. *40*, 120–123 (1985).
3 Euler R.: Problem 1178. Math. Mag. *56*, 326 (1983).
4 Klein B. G.: Solution I of 1178. Math. Mag. *57*, 302 (1984).
5 Seiffert H.-J.: Solution II of 1178. Math. Mag. *57*, 302 (1984).
6 Seiffert H.-J.: Werte zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel zweier Zahlen. El. Math. *42*, 105–107 (1987).
7 Stolarsky K. B.: Generalizations of the logarithmic mean. Math. Mag. *48*, 87–92 (1975).
8 Stolarsky K. B.: The power and generalized means. Am. Math. Monthly *87*, 545–548 (1980).
9 Bemerkung zur kleinen Mitteilung von H. Alzer. E. Math. *41*, 41 (1986).

 0013-6018/89/010016-03 $1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 977. Let $p_m(x)$ denote the characteristic polynomial of the (m, m) top left submatrix of an $(n+1, n+1)$ irreducible tridiagonal matrix $A = (a_{ij})$. Let $p_{n+1}(x)$ have $n+1$ distinct real zeros $\xi_0, \ldots, \xi_n$. Put

$$D_k := \begin{vmatrix} p_k(\xi_k) & p_k(\xi_{k+1}) & \cdots & p_k(\xi_n) \\ p_{k+1}(\xi_k) & p_{k+1}(\xi_{k+1}) & \cdots & p_{k+1}(\xi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n(\xi_k) & p_n(\xi_{k+1}) & \cdots & p_n(\xi_n) \end{vmatrix}.$$

Prove $D_k \neq 0$ $(0 \leqq k \leqq n)$.

Remark: The problem arose in a study of a fluid reservoir regulated by a general birth-death process.

E. A. van Doorn, A. A. Jagers, Enschede, NL

Solution by the proposer. Let $N = n - k$. Define $p_0(x) = 1$. Then the familiar recurrence relation

$$p_m(x) = (a_{mm} - x)\, p_{m-1}(x) - a_{m,m-1}\, a_{m-1,m}\, p_{m-2}(x) \tag{*}$$

is valid for all m with $2 \leqq m \leqq n+1$. Hence, if two consecutive polynomials $p_{m-1}(x)$ and $p_m(x)$ have a zero t in common, then $p_j(t) = 0$ for all j, since $a_{s,s-1}\, a_{s-1,s} \neq 0$ by definition of irreducibility. However, this contradicts the definition of $p_0(x)$. It follows that $p_{m-1}(x)$ and $p_m(x)$ have distinct zeros. In particular, since $p_n(\xi_n) = p_{n+1}(\xi_n)$ we must have