

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 44 (1989)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Eine Anwendung des Gaußschen Integralsatzes  
**Autor:** Herold, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-41606>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## REFERENCES

- 1 Coxeter H. S. M.: The densities of the regular polytopes. Proc. Camb. Phil. Soc. 27, 201–211, (1931); 28, 509–521 (1932); 29, 1–22 (1933).
- 2 Coxeter H. S. M.: Non-Euclidean Geometry, 5th ed., University of Toronto Press, Toronto, 1965.
- 3 Coxeter H. S. M.: Twelve Geometric Essays. Southern Illinois University Press, Carbondale, 1968.
- 4 Coxeter H. S. M.: Introduction to Geometry, 2nd ed., Wiley, New York, 1969.
- 5 Coxeter H. S. M.: Regular Polytopes, 3rd ed., Dover, New York, 1973.
- 6 Coxeter H. S. M.: Regular Complex Polytopes, Cambridge University Press, 1974.
- 7 Debrunner H. E.: Decomposing orthoschemes into orthoschemes, to appear.
- 8 Hess E.: Über die regulären Polytope höherer Art. Sitzungsber. Gesells. Beförderung gesammten Naturwiss. Marburg, 1885, 31–57.
- 8a Jamnitzer W.: Perspectiva corporum regularium. Verlag Biermann und Boukes, Frankfurt, 1972. See also El. Math. 11, 97–100, (1956).
- 9 Lobachevsky N. I.: Imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Teubner, Leipzig, 1904.
- 10 Schläfli L.: Gesammelte Mathematische Abhandlungen I. Birkhäuser, Basel, 1950.
- 11 Schläfli L.: Gesammelte Mathematische Abhandlungen II. Birkhäuser, Basel, 1953.
- 12 Wills J. M.: Mathematik und Kunst: Die platonischen Körper. Siegener Studien 35, 17–27, (1983/84).

© 1989 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/89/020025-12\$1.50 + 0.20/0

## Eine Anwendung des Gaußschen Integralsatzes

Mittels einer geeigneten komplexen Formulierung des Gaußschen Integralsatzes für die Ebene werden Formeln für die Trägheitsmomente [1\*] eines Dreiecks hergeleitet, die in einfacher Weise lediglich von den Eckpunkten abhängen.

Mit  $G$  werde ein beschränktes Gebiet in der  $x, y$ -Ebene bezeichnet, dessen Rand aus einer einfach geschlossenen positiv orientierten stückweise stetig differenzierbaren Kurve  $\partial G$  besteht. Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld

$$(u, v): \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

gilt der Gaußsche Satz:

$$\iint_G \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial G} (u dy - v dx),$$

und entsprechend erhält man für das Vektorfeld  $(v, -u)$

$$\iint_G \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial G} (u dx + v dy).$$

Die Verknüpfung dieser beiden Formeln, indem man

$$f := u + iv, \quad z := x + iy, \quad \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

setzt, führt zu der Formel

$$\frac{2}{i} \iint_G \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} dx dy = \int_{\partial G} f(z) d\bar{z}, \quad (1)$$

die offensichtlich für jede stetig differenzierbare Funktion  $f: \bar{G} \rightarrow \mathbb{C}$  gilt.

*Bemerkung:* Für eine holomorphe Funktion  $f$  ist (aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen)

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{df}{dz}, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0.$$

Im folgenden bezeichne  $D$  ein Dreieck mit Flächeninhalt  $|D|$  und entgegen dem Uhrzeigersinn angeordneten Eckpunkten  $z_1, z_2, z_3$ .

Durch Wahl von  $f(z) \equiv z$  in Formel (1) erhält man

$$|D| = \iint_D dx dy = \frac{i}{2} \int_{\partial D} z d\bar{z}.$$

Die Gerade durch die Punkte  $a$  und  $b$  ( $a \neq b$ ) wird dargestellt durch

$$\bar{z}(b - a) = (\bar{b} - \bar{a})z + \bar{a}b - a\bar{b}. \quad (2)$$

Deshalb ist

$$\int_a^b z d\bar{z} = \frac{\bar{b} - \bar{a}}{b - a} \int_a^b z dz = \frac{1}{2}(\bar{b} - \bar{a})(b + a),$$

so dass

$$|D| = \frac{i}{4} [(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_2 + z_1) + (\bar{z}_3 - \bar{z}_2)(z_3 + z_2) + (\bar{z}_1 - \bar{z}_3)(z_1 + z_3)]$$

oder

$$|D| = \frac{i}{4} [z_1(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) + z_2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + z_3(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)]. \quad (3)$$

Anwendung von Formel (1) auf  $f(z) \equiv z^3$  und Benutzung von (2) und (3) ergeben

$$\begin{aligned} \frac{24}{i} \iint_D z^2 dx dy &= 4 \int_{\partial D} z^3 d\bar{z} = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{z_2 - z_1} (z_2^4 - z_1^4) + \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_2}{z_3 - z_2} (z_3^4 - z_2^4) + \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}{z_1 - z_3} (z_1^4 - z_3^4) \\ &= z_1^4 \left( \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}{z_1 - z_3} - \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{z_2 - z_1} \right) + z_2^4(\dots) + z_3^4(\dots) \\ &= \frac{z_1^4}{(z_1 - z_3)(z_1 - z_2)} \frac{4|D|}{i} + \frac{z_2^4}{(z_2 - z_3)(z_2 - z_1)} \frac{4|D|}{i} + \frac{z_3^4}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)} \frac{4|D|}{i} \\ &= \frac{4|D|}{i} (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\iint_D z^2 dx dy = \frac{|D|}{6} [(z_1 + z_2 + z_3)^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2 z_3]. \quad (4)$$

Durch Vergleich der Imaginärteile in (4) gelangt man zur

*Formel für das Deviationsmoment von D*

$$\iint_D x y dy dy = \frac{|D|}{12} \operatorname{Im} [(z_1 + z_2 + z_3)^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2 z_3].$$

Anwendung von Formel (1) auf

$$f(z) = \bar{z} \frac{d^2 H(z)}{dz^2},$$

wobei  $H(z) \equiv h(z)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$  mit holomorphem  $h: \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$  ist, ergibt

$$\frac{2}{i} \iint_D \bar{z} \frac{d^3 H(z)}{dz^3} dx dy = \int_{\partial D} \bar{z} \frac{d^2 H(z)}{dz^2} d\bar{z}. \quad (5)$$

Mit Bezug auf (2) erhält man durch partielle Integration unter Beachtung von  $H(z_1) = H(z_2) = 0$

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} \bar{z} H''(z) d\bar{z} &= \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{z_2 - z_1} [\bar{z} H'(z)]_{z_1}^{z_2} - \left( \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{z_2 - z_1} \right)^2 \int_{z_1}^{z_2} H'(z) dz \\ &= \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{z_2 - z_1} (\bar{z}_2 H'(z_2) - \bar{z}_1 H'(z_1)). \end{aligned}$$

Durch Verwendung der entsprechenden Werte für die Integrale längs der anderen Seiten von  $D$  ergibt sich

$$\int_{\partial D} \bar{z} H''(z) d\bar{z} = \bar{z}_1 H'(z_1) \left( \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}{z_1 - z_3} - \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{z_2 - z_1} \right) + \bar{z}_2 H'(z_2)(\dots) + \bar{z}_3 H'(z_3)(\dots),$$

und weiterhin mit Heranziehung von (3)

$$\iint_D \bar{z} H''(z) d\bar{z} = \frac{4|D|}{i} \left( \frac{\bar{z}_1 H'(z_1)}{(z_1 - z_3)(z_1 - z_2)} + \frac{\bar{z}_2 H'(z_2)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)} + \frac{\bar{z}_3 H'(z_3)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)} \right).$$

Setzt man die rechte Seite in (5) ein und beachtet die Definition von  $H$ , gelangt man zu dem Ergebnis

$$\iint_D \bar{z} \frac{d^3}{dz^3} (h(z)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)) dx dy = 2|D|(\bar{z}_1 h(z_1) + \bar{z}_2 h(z_2) + \bar{z}_3 h(z_3)). \quad (6)$$

Durch Anwendung von (6) auf  $h(z) \equiv 1$  folgt die

*Formel für den Schwerpunkt von  $D$*

$$\frac{1}{|D|} \iint_D z dx dy = \frac{1}{3} (z_1 + z_2 + z_3). \quad (7)$$

Die Anwendung von (6) auf  $h(z) \equiv z + (z_1 + z_2 + z_3)$  ergibt die

*Formel für das Trägheitsmoment von  $D$  bezüglich der Achse durch den Nullpunkt senkrecht zu  $D$*

$$\iint_D |z|^2 dx dy = \frac{|D|}{12} (|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2). \quad (8)$$

Verbindet man (4) und (8), gewinnt man die

*Formeln für die Trägheitsmomente von  $D$  bezüglich der reellen und der imaginären Achse:*

$$\iint_D y^2 dx dy = \frac{|D|}{24} [(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2) - 2R(z_1, z_2, z_3)],$$

$$\iint_D x^2 dx dy = \frac{|D|}{24} [(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2) + 2R(z_1, z_2, z_3)]$$

mit

$$R(z_1, z_2, z_3) := \operatorname{Re} [(z_1 + z_2 + z_3)^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2 z_3].$$

Durch die Translation  $z \mapsto z - z_0$  und mit der Bezeichnung

$$\zeta := \frac{1}{3} (z_1 + z_2 + z_3)$$

für den Schwerpunkt von  $D$  folgt aus (8) die

*Formel für das Trägheitsmoment von  $D$  bezüglich der Achse durch  $z_0$  senkrecht zu  $D$*

$$\iint_D |z - z_0|^2 dx dy = \frac{|D|}{12} (|z_1 - z_0|^2 + |z_2 - z_0|^2 + |z_3 - z_0|^2) + \frac{3}{4} |D| |\zeta - z_0|^2, \quad (9)$$

insbesondere *bezüglich der Achse durch den Schwerpunkt*

$$\iint_D |z - \zeta|^2 dx dy = \frac{|D|}{12} (|z_1 - \zeta|^2 + |z_2 - \zeta|^2 + |z_3 - \zeta|^2).$$

Aus

$$\begin{aligned} |z - \zeta|^2 &= |(z - z_0) - (\zeta - z_0)|^2 \\ &= |z - z_0|^2 + |\zeta - z_0|^2 - (z - z_0)(\bar{\zeta} - \bar{z}_0) - (\bar{z} - \bar{z}_0)(\zeta - z_0) \end{aligned}$$

erhält man aufgrund der sich aus (7) ergebenden Formel

$$\iint_D (z - z_0) dx dy = (\zeta - z_0) |D|$$

durch Integration

$$\iint_D |z - \zeta|^2 dx dy = \iint_D |z - z_0|^2 dx dy + |\zeta - z_0|^2 |D| - 2|\zeta - z_0|^2 |D|,$$

also den *Steinerschen Trägheitssatz* [2\*]

$$\iint_D |z - z_0|^2 dx dy = \iint_D |z - \zeta|^2 dx dy + |\zeta - z_0|^2 |D|.$$

H. Herold, Fachbereich Mathematik,  
Universität Marburg/Lahn

#### ANMERKUNGEN

[1\*] Bezüglich der verwendeten physikalischen Begriffe und Grundtatsachen aus der Mechanik sei etwa verwiesen auf: Naas J. und Schmid H. L.: *Mathematisches Wörterbuch*, Teubner Stuttgart, Band II.

[2\*] Benannt nach J. Steiner, auf dessen geometrische Untersuchungen dieser Satz zurückgeht (siehe: Jacob Steiner's *Gesammelte Werke*, zweiter Band, Berlin 1882, S. 106 ff.).