Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 44 (1989)
Heft: 2

Artikel: Eine Anwendung des Gaußschen Integralsatzes
Autor: Herold, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41606

REFERENCES

1 Coxeter H. S. M.: The densities of the regular polytopes. Proc. Camb. Phil. Soc. *27,* 201–211, (1931); *28,* 509–521 (1932); *29,* 1–22 (1933).
2 Coxeter H. S. M.: Non-Euclidean Geometry, 5th ed., University of Toronto Press, Toronto, 1965.
3 Coxeter H. S. M.: Twelve Geometric Essays. Southern Illinois University Press, Carbondale, 1968.
4 Coxeter H. S. M.: Introduction to Geometry, 2nd ed., Wiley, New York, 1969.
5 Coxeter H. S. M.: Regular Polytopes, 3rd ed., Dover, New York, 1973.
6 Coxeter H. S. M.: Regular Complex Polytopes, Cambridge University Press, 1974.
7 Debrunner H. E.: Decomposing orthoschemes into orthoschemes, to appear.
8 Hess E.: Über die regulären Polytope höherer Art. Sitzungsber. Gesells. Beförderung gesammten Naturwiss. Marburg, 1885, 31–57.
8a Jamnitzer W.: Perspectiva corporum regularium. Verlag Biermann und Boukes, Frankfurt, 1972. See also El. Math. *11,* 97–100, (1956).
9 Lobachevsky N. I.: Imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Teubner, Leipzig, 1904.
10 Schläfli L.: Gesammelte Mathematische Abhandlungen I. Birkhäuser, Basel, 1950.
11 Schläfli L.: Gesammelte Mathematische Abhandlungen II. Birkhäuser, Basel, 1953.
12 Wills J. M.: Mathematik und Kunst: Die platonischen Körper. Siegner Studien *35,* 17–27, (1983/84).

 0013-6018/89/020025-12$1.50+0.20/0

Eine Anwendung des Gaußschen Integralsatzes

Mittels einer geeigneten komplexen Formulierung des Gaußschen Integralsatzes für die Ebene werden Formeln für die Trägheitsmomente [1*] eines Dreiecks hergeleitet, die in einfacher Weise lediglich von den Eckpunkten abhängen.
Mit G werde ein beschränktes Gebiet in der x, y-Ebene bezeichnet, dessen Rand aus einer einfach geschlossenen positiv orientierten stückweise stetig differenzierbaren Kurve ∂G besteht. Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld

$$(u, v)\colon\ \bar{G} \to \mathbb{R}^2$$

gilt der Gaußsche Satz:

$$\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\partial G} (u\, dy - v\, dx),$$

und entsprechend erhält man für das Vektorfeld $(v, -u)$

$$\iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\partial G} (u\, dx + v\, dy).$$

Die Verknüpfung dieser beiden Formeln, indem man

$$f := u + i\,v, \qquad z := x + i\,y, \qquad \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

setzt, führt zu der Formel

$$\frac{2}{i} \iint_G \frac{\partial f(z)}{\partial z}\, dx\, dy = \int_{\partial G} f(z)\, d\bar{z}, \tag{1}$$

die offensichtlich für jede stetig differenzierbare Funktion $f\colon \bar{G} \to \mathbb{C}$ gilt.

Bemerkung: Für eine holomorphe Funktion f ist (aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen)

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dz}, \qquad \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0.$$

Im folgenden bezeichne D ein Dreieck mit Flächeninhalt $|D|$ und entgegen dem Uhrzeigersinn angeordneten Eckpunkten z_1, z_2, z_3.
Durch Wahl von $f(z) \equiv z$ in Formel (1) erhält man

$$|D| = \iint_D dx\, dy = \frac{i}{2} \int_{\partial D} z\, d\bar{z}.$$

Die Gerade durch die Punkte a und b $(a \neq b)$ wird dargestellt durch

$$\bar{z}(b-a) = (\bar{b} - \bar{a})\, z + \bar{a} b - a \bar{b}. \tag{2}$$

Deshalb ist

$$\int_a^b z\, d\bar{z} = \frac{\bar{b} - \bar{a}}{b-a} \int_a^b z\, dz = \tfrac{1}{2}(\bar{b} - \bar{a})(b+a),$$

so dass

$$|D| = \frac{i}{4}\left[(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_2 + z_1) + (\bar{z}_3 - \bar{z}_2)(z_3 + z_2) + (\bar{z}_1 - \bar{z}_3)(z_1 + z_3)\right]$$

oder

$$|D| = \frac{i}{4}\left[z_1(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) + z_2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + z_3(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)\right]. \tag{3}$$

Anwendung von Formel (1) auf $f(z) \equiv z^3$ und Benutzung von (2) und (3) ergeben

$$\frac{24}{i} \iint_D z^2\, dx\, dy = 4 \int_{\partial D} z^3\, d\bar{z} = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{z_2 - z_1}(z_2^4 - z_1^4) + \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_2}{z_3 - z_2}(z_3^4 - z_2^4) + \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}{z_1 - z_3}(z_1^4 - z_3^4)$$

$$= z_1^4 \left(\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}{z_1 - z_3} - \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{z_2 - z_1} \right) + z_2^4(\ldots) + z_3^4(\ldots)$$

$$= \frac{z_1^4}{(z_1 - z_3)(z_1 - z_2)} \frac{4|D|}{i} + \frac{z_2^4}{(z_2 - z_3)(z_2 - z_1)} \frac{4|D|}{i} + \frac{z_3^4}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)} \frac{4|D|}{i}$$

$$= \frac{4|D|}{i}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3).$$

Es folgt

$$\iint_D z^2\, dx\, dy = \frac{|D|}{6}[(z_1 + z_2 + z_3)^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2 z_3]. \tag{4}$$

Durch Vergleich der Imaginärteile in (4) gelangt man zur

Formel für das Deviationsmoment von D

$$\iint_D x\, y\, dy\, dy = \frac{|D|}{12} \operatorname{Im}[(z_1 + z_2 + z_3)^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2 z_3].$$

Anwendung von Formel (1) auf

$$f(z) = \bar{z} \frac{d^2 H(z)}{dz^2},$$

wobei $H(z) \equiv h(z)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ mit holomorphem h: $\bar{D} \to \mathbb{C}$ ist, ergibt

$$\frac{2}{i} \iint_D \bar{z} \frac{d^3 H(z)}{dz^3}\, dx\, dy = \int_{\partial D} \bar{z} \frac{d^2 H(z)}{dz^2}\, d\bar{z}. \tag{5}$$

Mit Bezug auf (2) erhält man durch partielle Integration unter Beachtung von $H(z_1) = H(z_2) = 0$

$$\int_{z_1}^{z_2} \bar{z} H''(z)\, d\bar{z} = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{z_2 - z_1}[\bar{z} H'(z)]_{z_1}^{z_2} - \left(\frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{z_2 - z_1} \right)^2 \int_{z_1}^{z_2} H'(z)\, dz$$

$$= \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{z_2 - z_1}(\bar{z}_2 H'(z_2) - \bar{z}_1 H'(z_1)).$$

Durch Verwendung der entsprechenden Werte für die Integrale längs der anderen Seiten von D ergibt sich

$$\int_{\partial D} \bar{z}\, H''(z)\, d\bar{z} = \bar{z}_1\, H'(z_1)\left(\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}{z_1 - z_3} - \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{z_2 - z_1}\right) + \bar{z}_2 H'(z_2)(\ldots) + \bar{z}_3 H'(z_3)(\ldots),$$

und weiterhin mit Heranziehung von (3)

$$\int_{\partial D} \bar{z}\, H''(z)\, d\bar{z} = \frac{4|D|}{i}\left(\frac{\bar{z}_1\, H'(z_1)}{(z_1 - z_3)(z_1 - z_2)} + \frac{\bar{z}_2\, H'(z_2)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)} + \frac{\bar{z}_3\, H'(z_3)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)}\right).$$

Setzt man die rechte Seite in (5) ein und beachtet die Definition von H, gelangt man zu dem Ergebnis

$$\iint_D \bar{z}\, \frac{d^3}{dz^3}\left(h(z)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\right) dx\, dy = 2|D|\left(\bar{z}_1\, h(z_1) + \bar{z}_2\, h(z_2) + \bar{z}_3\, h(z_3)\right). \quad (6)$$

Durch Anwendung von (6) auf $h(z) \equiv 1$ folgt die

Formel für den Schwerpunkt von D

$$\frac{1}{|D|} \iint_D z\, dx\, dy = \tfrac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3). \quad (7)$$

Die Anwendung von (6) auf $h(z) \equiv z + (z_1 + z_2 + z_3)$ ergibt die

Formel für das Trägheitsmoment von D bezüglich der Achse durch den Nullpunkt senkrecht zu D

$$\iint_D |z|^2\, dx\, dy = \frac{|D|}{12}\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2\right). \quad (8)$$

Verbindet man (4) und (8), gewinnt man die

Formeln für die Trägheitsmomente von D bezüglich der reellen und der imaginären Achse:

$$\iint_D y^2\, dx\, dy = \frac{|D|}{24}\left[\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2\right) - 2R(z_1, z_2, z_3)\right],$$

$$\iint_D x^2\, dx\, dy = \frac{|D|}{24}\left[\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2\right) + 2R(z_1, z_2, z_3)\right]$$

mit

$$R(z_1, z_2, z_3) := Re\left[(z_1 + z_2 + z_3)^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2 z_3\right].$$

Durch die Translation $z \mapsto z - z_0$ und mit der Bezeichnung

$$\zeta := \tfrac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$$

für den Schwerpunkt von D folgt aus (8) die

Formel für das Trägheitsmoment von D bezüglich der Achse durch z_0 senkrecht zu D

$$\iint_D |z - z_0|^2 \, dx\, dy = \frac{|D|}{12}(|z_1 - z_0|^2 + |z_2 - z_0|^2 + |z_3 - z_0|^2) + \tfrac{3}{4}|D|\,|\zeta - z_0|^2, \tag{9}$$

insbesondere *bezüglich der Achse durch den Schwerpunkt*

$$\iint_D |z - \zeta|^2 \, dx\, dy = \frac{|D|}{12}(|z_1 - \zeta|^2 + |z_2 - \zeta|^2 + |z_3 - \zeta|^2).$$

Aus

$$\begin{aligned} |z - \zeta|^2 &= |(z - z_0) - (\zeta - z_0)|^2 \\ &= |z - z_0|^2 + |\zeta - z_0|^2 - (z - z_0)(\bar{\zeta} - \bar{z}_0) - (\bar{z} - \bar{z}_0)(\zeta - z_0) \end{aligned}$$

erhält man aufgrund der sich aus (7) ergebenden Formel

$$\iint_D (z - z_0)\, dx\, dy = (\zeta - z_0)\,|D|$$

durch Integration

$$\iint_D |z - \zeta|^2 \, dx\, dy = \iint_D |z - z_0|^2 \, dx\, dy + |\zeta - z_0|^2 |D| - 2|\zeta - z_0|^2 |D|,$$

also den *Steinerschen Trägheitssatz* [2*]

$$\iint_D |z - z_0|^2 dx\, dy = \iint_D |z - \zeta|^2 \, dx\, dy + |\zeta - z_0|^2 |D|.$$

H. Herold, Fachbereich Mathematik,
Universität Marburg/Lahn

ANMERKUNGEN

[1*] Bezüglich der verwendeten physikalischen Begriffe und Grundtatsachen aus der Mechanik sei etwa verwiesen auf: Naas J. und Schmid H. L.: Mathematisches Wörterbuch, Teubner Stuttgart, Band II.

[2*] Benannt nach J. Steiner, auf dessen geometrische Untersuchungen dieser Satz zurückgeht (siehe: Jacob Steiner's Gesammelte Werke, zweiter Band, Berlin 1882, S. 106ff.).

 0013-6018/89/020036-05$1.50+0.20/0