

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 44 (1989)  
**Heft:** 5

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

kann nicht auch  $\gamma_j = \pi - \beta_j$  sein, denn sonst wäre  $\gamma_i + \gamma_j = \pi + \beta_k$  im Widerspruch zur Festsetzung, daß  $\gamma_i$  und  $\gamma_j$  Innenwinkel eines Dreiecks sind. Man hat also in diesem Fall  $\gamma_i = \pi - \beta_i$ ,  $\gamma_j = \beta_j$  und ebenso  $\gamma_k = \beta_k$ . Hieraus folgt, da  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$  ist,  $\gamma_i = \pi - \beta_i = \beta_i$ . Man erhält also in jedem Fall  $\gamma_i = \beta_i$  für alle  $i = 1, 2, 3$ , womit das Theorem bewiesen ist.

**Anmerkung.** Das Theorem gilt, wie aus [1] hervorgeht, auch für den Fall, dass alle Dreiecke  $A_2 A_3 B_1$ ,  $A_3 A_1 B_2$ ,  $A_1 A_2 B_3$  nach innen an das Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  angelegt sind, sofern der Umkreismittelpunkt des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  nicht zugleich der Umkreismittelpunkt aller nach innen angelegten Dreiecke ist. Der Beweis hierfür läßt sich auch analog zu dem hier vorliegenden Beweis durchführen.

K. Schütte, Math. Institut, Universität München

#### LITERATUR

- 1 Schütte K.: Eine Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon. *Mathematische Semesterberichte* 34, 256–268 (1987).

© 1989 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/89/050133-06\$1.50 + 0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 993.** Man beweise oder widerlege: Zu jeder natürlichen Zahl  $m$  gibt es unendlich viele natürliche Zahlen  $k$  derart, dass

$$S(m, k) := m + (m + 1) + \dots + (m + k - 1)$$

das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

J. Binz, Bolligen

**Lösung.** Die Aussage wird folgendermassen bewiesen:

Es ist  $S(1, 1) = 1$  eine Quadratzahl.

Ist  $S(1, k)$  eine Quadratzahl, so sind sowohl

$$S(1, 4k(k+1)) = \frac{4k(k+1)(4k(k+1)+1)}{2} = 4 \cdot S(1, k) \cdot (2k+1)^2, \quad (1)$$

als auch

$$\begin{aligned} S(m, (2m-1)k) &= \frac{(2m-1)k(m+m+(2m-1)k-1)}{2} \\ &= \frac{(2m-1)k(2m-1)(k+1)}{2} = (2m-1)^2 \cdot S(1, k) \end{aligned} \quad (2)$$

Quadratzahlen.

Wegen (1) enthält  $\{S(1, k)\}$  und damit wegen (2) für jedes  $m$  auch  $\{S(m, k)\}$  unendlich viele Quadratzahlen.

P. Hohler, Olten

Weitere Lösungen sandten R. Acampora (Niederweningen), G. Bercea (München, BRD), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), J. Fehér (Pécs, Ungarn), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-Wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr. A. Meyer (Bern), W. Raffke (Vechta, BRD), K. Schütte (München, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), P. Weisenhorn (Achern, BRD), H. Widmer (Rieden).

**Aufgabe 994.**  $\sigma'(n)$  bezeichne die Summe aller quadratfreien Teiler der natürlichen Zahl  $n$ . Genau für welche  $n$  gilt  $n \mid \sigma'(n)$ ?

H. Bergmann, Hamburg, BRD

**Lösung.**  $n = 1$  erfüllt die Bedingung, es sei deshalb  $n \geq 2$ . Ausgehend von der Primfaktorzerlegung

$$n = \prod_{i=1}^m p_i^{e_i}, \quad p_1 < \dots < p_m, \quad \text{alle } e_i \geq 1$$

haben wir

$$\sigma'(n) = 1 + \sum p_i + \sum p_i p_j + \dots + \prod p_i = \prod_{i=1}^m (1 + p_i).$$

Aus  $n \mid \sigma'(n)$  folgt nun (weil  $p_m$  und  $p_m + 1$  teilerfremd sind)

$$p_m \mid \prod_{i=1}^{m-1} (1 + p_i) \quad (1)$$

und weiter  $m \geq 2$ . Für  $p_m \geq 5$  gilt aber  $p_m \geq p_{m-1} + 2$ , im Widerspruch zu (1). Deshalb ist  $p_m = 3$ ,  $n = 2^a \cdot 3^b$  und  $\sigma'(n) = 12$ . Das liefert schliesslich  $n = 6$  oder  $n = 12$ .

W. Janous, Innsbruck, A

Weitere Lösungen sandten R. Acampora (Niederweningen), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), J. Fehér (Pécs, Ungarn), L. Kuipers (Sierre), Kee-Wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr. A. Meyer (Bern), M. Vowe (Therwil).

**Aufgabe 995.** Auf wie viele Arten kann man aus einer  $n$ -elementigen Menge  $U$  zwei nichtleere disjunkte Teilmengen auswählen?

M. Jeger, Zürich

**1. Lösung.** Zu jedem geordneten Paar  $(A, B)$  von nichtleeren disjunkten Teilmengen von  $U$  bilden wir die Funktion

$$f_{(A,B)}: x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 2 & x \in B \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Umgekehrt ist  $(A, B)$  durch eine Funktion  $U \rightarrow \{0, 1, 2\}$  eindeutig bestimmt. Solche Funktionen gibt es  $3^n - 1$ , die nicht null sind. Davon wiederum sind  $2^n - 1$  solche, die den Wert 1 nicht annehmen (dann wäre  $A$  leer) und ebensoviele, die den Wert 2 nicht annehmen. Insgesamt gibt es also

$$3^n - 1 - 2(2^n - 1) = 3^n - 2^{n+1} + 1$$

geordnete und damit

$$N = \frac{3^n + 1}{2} - 2^n$$

ungeordnete Paare der verlangten Art.

A. Müller, Zürich

**2. Lösung (mit Verallgemeinerung).** Jede Auswahl von genau  $k$  disjunkten (nichtleeren) Teilmengen  $T_1, T_2, \dots, T_k$  aus der Menge  $U = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  repräsentiert eine Abbildung  $f$  bzw. ein  $n$ -Tupel über der Menge  $V = \{0, 1, \dots, k\}$ , wenn  $f: i \mapsto j \ i \in U, j \in V, i \in T_j$  und  $T_0$  die Restmenge der bei der Auswahl nicht berücksichtigten Elemente von  $U$  bezeichnet. Es sind also die  $n$ -Tupel, in denen jede (Teilmengen-)Nummer  $1, 2, \dots, k$  mindestens einmal vorkommt, zu zählen. Bezeichnet  $A_j$  die Menge aller  $n$ -Tupel mit mindestens einem Element « $j$ » (also  $\overline{A}_j$  alle  $n$ -Tupel ohne « $j$ »), so erhält man nach Division mit  $k!$  – die Bezeichnung der Teilmengen ist ja belanglos – und vermöge des Ein- und Ausschaltprinzips für die Anzahlen  $\mu$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k!} \mu \left( \bigcap_{j=1}^k A_j \right) \\ &= \frac{1}{k!} \left[ \mu \left( \bigcup_{j=0}^k A_j \right) - \sum_{j=1}^k \mu(\overline{A}_j) + \sum_{j_1 < j_2 = 1}^k \mu(\overline{A}_{j_1} \cap \overline{A}_{j_2}) - \dots + (-1)^k \mu(\overline{A}_1 \cap \dots \cap \overline{A}_k) \right] \\ &= \frac{(k+1)^n - \binom{k}{1} k^n + \binom{k}{2} (k-1)^n - \dots + (-1)^k \binom{k}{k} 1^n}{k!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(k+1)^{n+1} - \binom{k+1}{1}k^{n+1} + \binom{k+1}{2}(k-1)^{n+1} - \dots + (-1)^k \binom{k+1}{k}1^{n+1}}{(k+1)!} \\
 &= \underline{S(n+1, k+1)} \quad (\text{Stirling-Zahl 2. Art}).
 \end{aligned}$$

Mit  $k = 2$  ergibt  $S(n+1, 3) = \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2}$  das Resultat des Aufgabenstellers.

R. Wyss, Flumenthal

Weitere Lösungen sandten R. Acampora (Niederweningen), J Binz (Bolligen), O. Bugisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), K.-D. Drews (Rostock, DDR), H. Egli (Zürich), J. Fehér (Pécs, Ungarn), H. Guggenheimer (Farmingdale, USA), P. Hohler (Olten), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), Seminar-Problemgruppe (Kreuzlingen), Kee-Wai Lau (Hong Kong), J. H. van Lint (Eindhoven, NL), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), V. Mascioni (Origlio), Chr. A. Meyer (Bern), W. Raffke (Vechta, BRD), Schülerproblemgruppe Rämibühl (Zürich), A. Rauzenberg (Jülich, BRD), B. Ruh (Sollothurn), J. Schaer (Calgary, CD), K. Schütte (München), H.-J. Seiffert (Berlin), Hj. Stocker (Wädenswil), P. Weisenhorn (Achern), H. Widmer (Rieden), M. Vowe (Therwil). Eine Lösung war falsch.

**Aufgabe 996.** Für natürliche Zahlen  $n$  sei

$$\begin{aligned}
 f(n) &:= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{n-1-i}{i} \cdot 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - i}, \\
 g(n) &:= \frac{1}{2} \left[ (\sqrt{2} + 1) \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right) + (\sqrt{2} - 1) \cdot \sin\left(n \cdot \frac{3\pi}{4}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$f(n) = g(n) \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Dies ist zu zeigen.

K.-G. Warneke, Vechta, BRD

**Lösung.** Die Tschebyscheff-Polynome 2. Art

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1, \quad n = 0, 1, \dots \tag{1}$$

besitzen bekanntlich die Darstellung (s. z.B. Abramowitz/Stegun, Handbook of Mathematical Functions, New York 1965, p. 775)

$$U_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{n-i}{i} (2x)^{n-2i}. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) und mit  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  besteht demzufolge der Zusammenhang

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{n-i}{i} 2^{\frac{n}{2}-i} = \sqrt{2} \sin\left(\frac{n+1}{4}\pi\right). \quad (3)$$

Wie sich leicht zeigen läßt, gilt nun

$$2^{\frac{n}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1+(-1)^n(\sqrt{2}-1)} \cdot 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (4)$$

Wird (4) in (3) eingetragen und ersetzt man dann  $n$  durch  $n-1$ , so erscheint für natürliche Zahlen  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{n-1-i}{i} \cdot 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - i} &= \frac{\sqrt{2}+1-(-1)^n(\sqrt{2}-1)}{2} \sin \frac{\pi n}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{2} \sin \frac{\pi n}{4} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} \sin \frac{3\pi n}{4}, \end{aligned}$$

d. h. es ist  $f(n) = g(n)$ , w.z.b.w.

F. Götze, Jena, DDR

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bolligen), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), K.-D. Drews (Rostock, DDR), U. Graf (La Neuveville), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Kee-Wai Lau (Hong-Kong), W. Raffke (Vechta, BRD), H.-J. Seiffert (Berlin), P. Weisenhorn (Achern, BRD), M. Vowe (Therwil).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis 10. April 1990 an Dr. H. Kappus. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit Problem ... A, B bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

**Aufgabe 1017.** Für ein nicht gleichschenkliges Dreieck  $ABC$  mit Umkreismittelpunkt  $O$ , Umkreisradius  $R$  und Inkreisradius  $r$  bezeichne  $X$  den Schnittpunkt der durch  $A$  und den Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite  $BC$  verlaufenden Transversalen und der Mittelsenkrechten auf  $BC$ . Analog im Sinne zyklischer Vertauschung seien die Punkte  $Y, Z$  definiert. Man zeige, dass

$$OX + OY + OZ = 5R + 2r.$$

H. Kappus, Rodersdorf

**Aufgabe 1018.** Die Fibonacci-Folge  $(F_n)$ , definiert durch

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{für } n \geq 0,$$

ist bekanntlich für jedes  $m \in \mathbb{N}$  modulo  $m$  rein periodisch. Man bestimme die Periodenlänge für  $m = 2^k$  und  $m = 3^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

J. Binz, Bolligen

**Aufgabe 1019.**  $a, b, c$  seien die Seiten eines Dreiecks. Man zeige, dass

$$\sqrt{a^2 + 3(b-c)^2} + \sqrt{b^2 + 3(c-a)^2} \geq \sqrt{3c^2 + (a-b)^2}.$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

S. J. Bilchev, Russe, Bulgarien

**Aufgabe 1020.** Die Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  genüge der Differentialgleichung

$$f^{(4)}(z) = f(z)$$

und den Anfangsbedingungen

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0.$$

Man berechne den Wert des Produktes

$$\prod_{n=1}^{\infty} f(z/2^n); \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

H. Alzer, Johannesburg, Südafrika